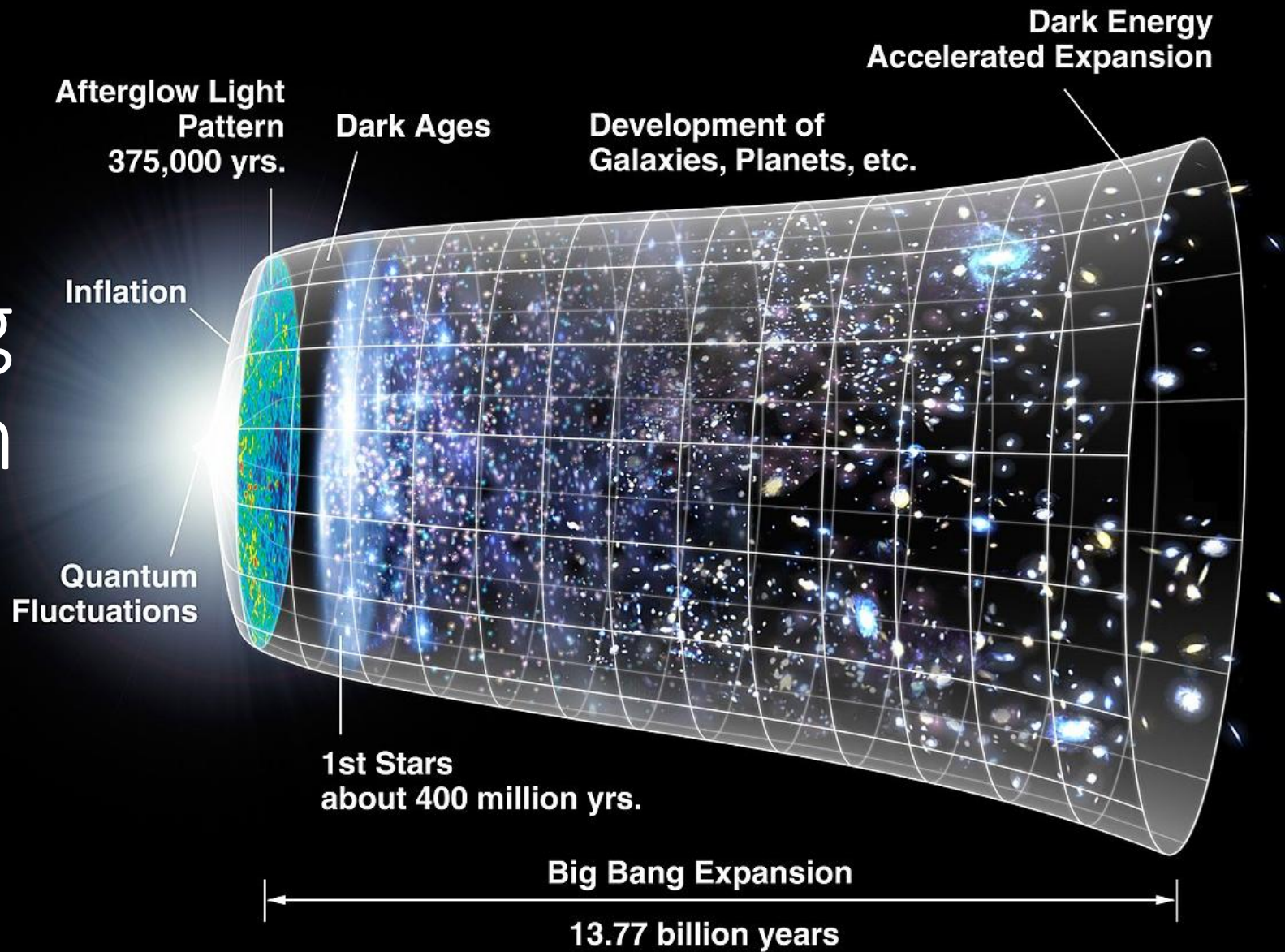




Die Entdeckung der kosmischen Expansion

Emmanuel Blum

Februar 2024



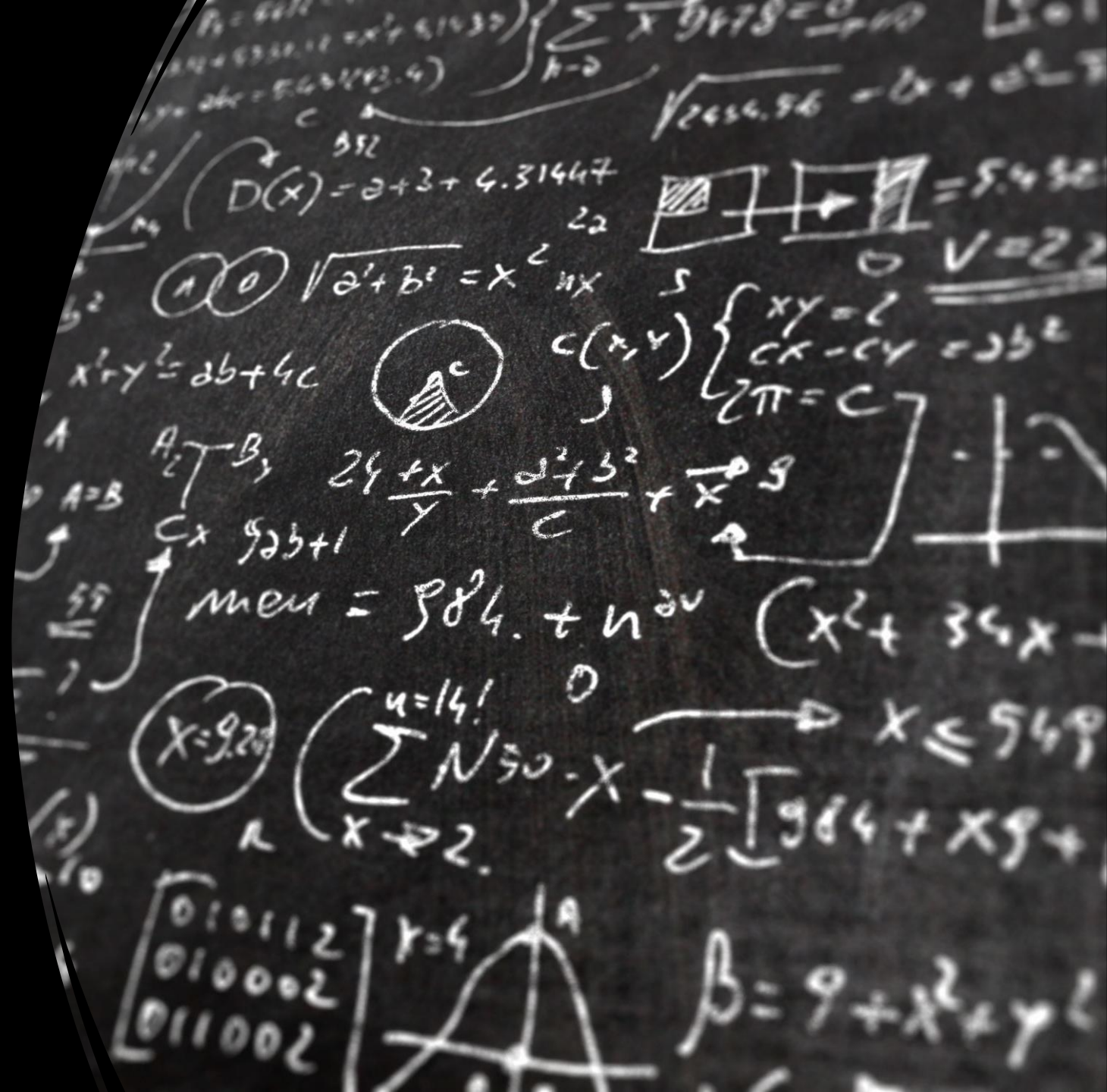


Inhalt

1- Friedmann-Gleichungen und deren speziellen Lösungen (Theorie)

2- Geschichte einer Expansion 1917-1932

1. Friedmann-Gleichungen



1915

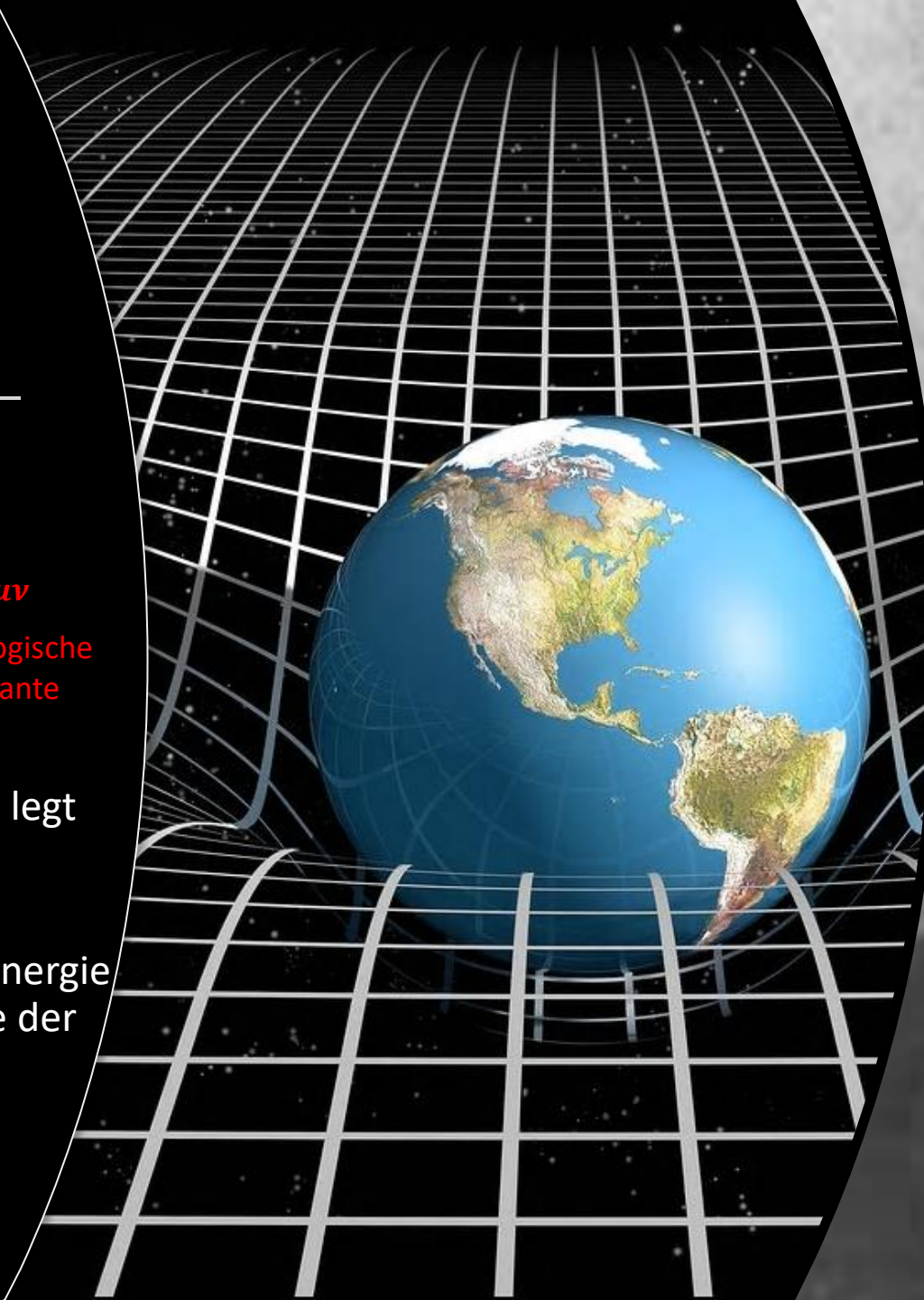
Einstein's ART

- Feldgleichung:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}$$

Kosmologische
Konstante

- Die Struktur der Raumzeit legt fest wie sich Materie und Energie bewegt.
- Umgekehrt Materie und Energie bestimmen die Geometrie der Raumzeit Struktur.



Geometrie des Raums

- Wie kann ich die Geometrie eines Raums beschreiben?
- Robertson-Walker Metrik beschreibt ein homogenes und isotropes Universum (mit Expansion)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2] \right)$$

a ist der Skalenfaktor

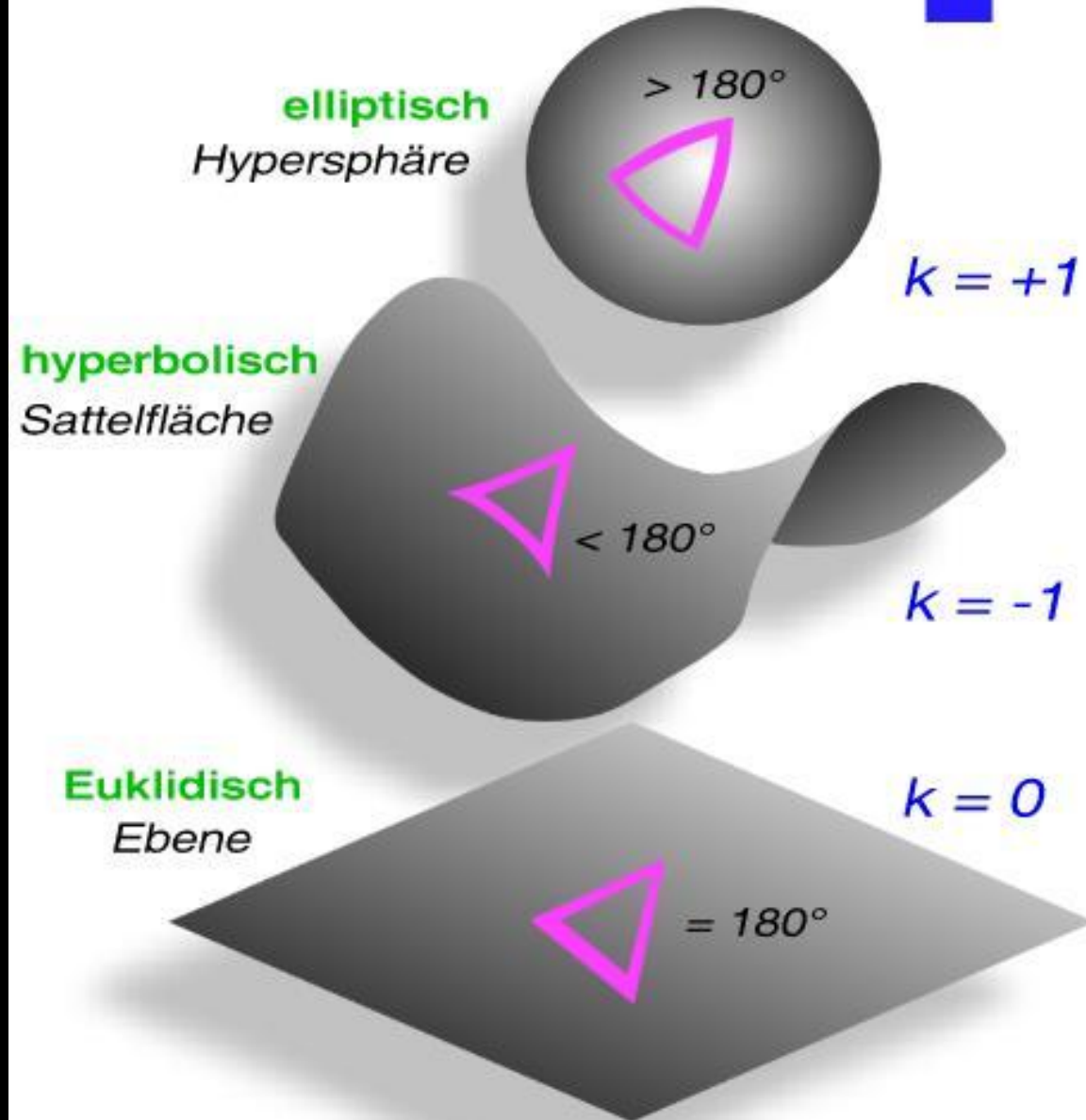
- Der Krümmungsparameter K entscheidet über die Geometrie des Universums



Vertiefung:
[Wie Gross ist das Universum?](#)

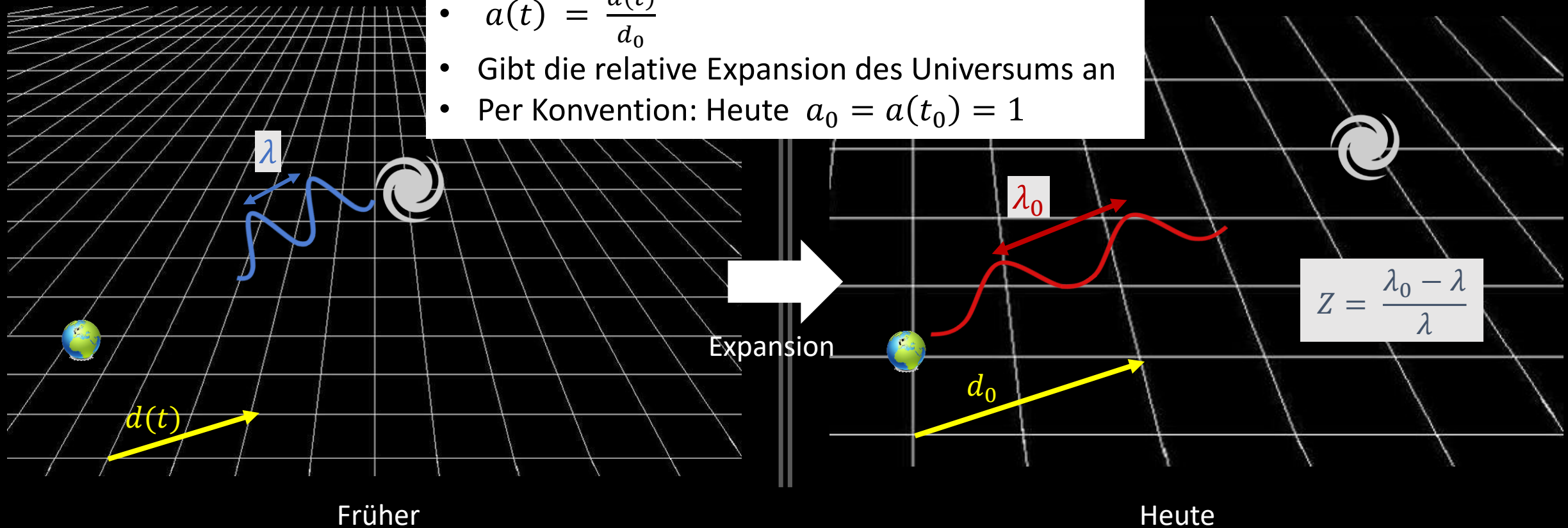
Geometrien des Universums

mit einfacher Topologie



Skalenfaktor $a(t)$

- $a(t) = \frac{d(t)}{d_0}$
- Gibt die relative Expansion des Universums an
- Per Konvention: Heute $a_0 = a(t_0) = 1$



Kosmologische Rotverschiebung

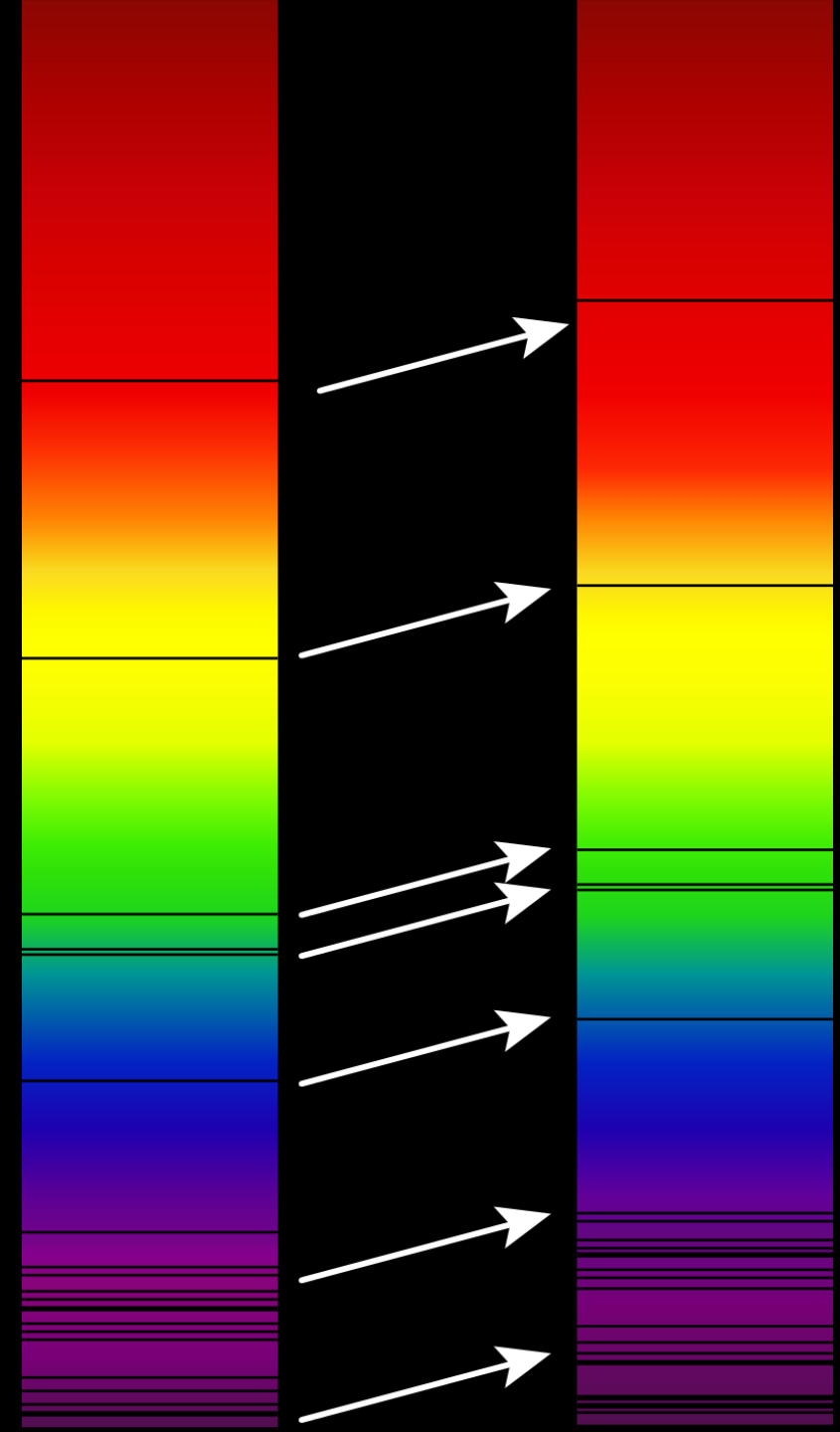
- Die Expansion des Universums (oder die Kontraktion) führt zu einer **Rotverschiebung** (oder Blau) der Photonen die sich durch den Raum bewegen
- Aus der Robertson-Walker Metrik:

$$a = \frac{1}{1 + z}$$



Vertiefung:
[Kosmologische Rotverschiebung](#)

Beispiele	z	a
Heute	0	1
Quasaren	bis 10	~0,1
Rekombination	1100	10 ⁻³

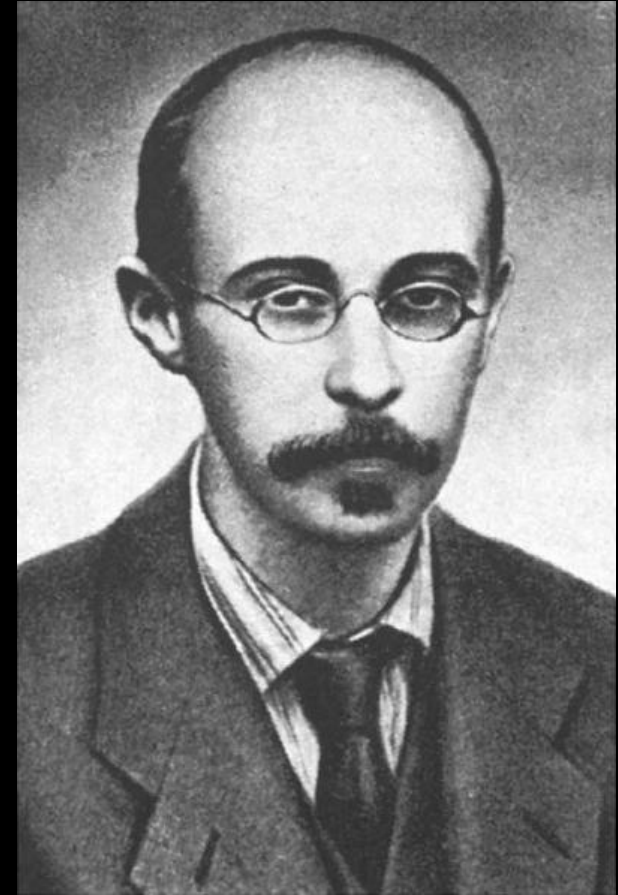


1922-1924

- Unter der Annahme dass das Universum **isotropisch** und **homogen** ist, schrumpft die Feldgleichung auf 2 gewöhnlichen Differentialgleichungen für den Skalenfaktor:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\lambda c^2}{3}$$
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\lambda c^2}{3}$$

- $a(t)$ Skalenfaktor
- G Gravitationskonstante
- $\rho = \rho(t)$ Materie Dichte
- $P = P(t)$ Druck
- K Krümmungsindex(-1,0,+1)
- λ Kosmologische Konstante
- c Lichtgeschwindigkeit



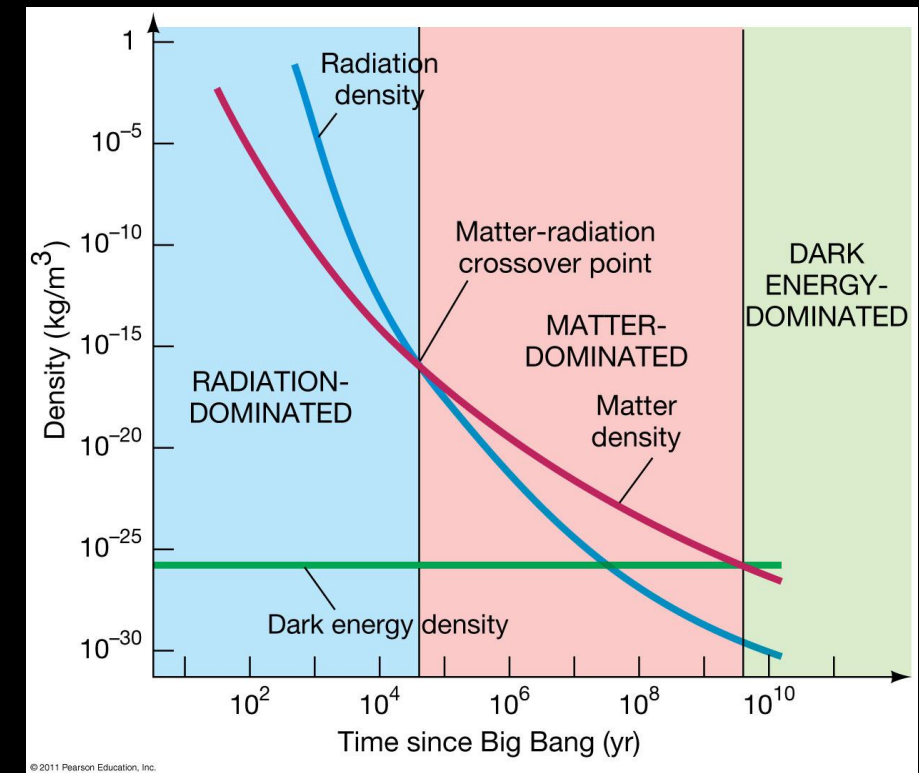
Friedmann Gleichungen

Russischer Mathematiker
A Alexandrowitsch Friedmann
1888 - 1925

Arten von Materien

- In Kosmologie gibt es 2 Arten von Materien: **Staub** (nicht relativistisch) und **Strahlung** (relativistisch)
- Druck $P(\rho)$ wird aus der Zustandsgleichung des idealen Gases berechnet
- Dichte $\rho(a)$ wird mit dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik abgeleitet

	Dichte	Druck P
Relativistische Materie „Strahlung“: Photonen, Neutrinos	$\rho_r = \rho_{r,0} a^{-4}$	$P = 1/3 \rho c^2$
Nicht relativistische Materie „Staub“: Baryonen + Dunkle Materie	$\rho_m = \rho_{m,0} a^{-3}$	0
„Andere Materien Art“ (Dunkle Energie)	$\rho = \text{Konstant}$	$P = -\rho c^2$



Druck P =Funktion(ρ)

Zustandsgleichung

- Ideales Gas: $PV = N \cdot k_B T \Rightarrow P = N \cdot k_B T \frac{\rho}{M}$
- Für die Thermische Energie gilt in diesem Zusammenhang: $\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$
- Daraus folgt $P = \frac{1}{3} N \cdot \cancel{m} \langle v^2 \rangle \frac{\rho}{\cancel{M}} = \frac{1}{3} \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \rho c^2 (= w \rho c^2)$ $\langle v \rangle$ mittlere Geschwindigkeit Teilchen

- Nicht Relativistische Materie : $\langle v \rangle \ll c \Rightarrow P \approx 0$
- Relativistische Materie: $\langle v \rangle \approx c \Rightarrow P = \frac{1}{3} \rho c^2$

Ersten Hauptsatz Thermodynamik

- Energiehaltung in Abwesenheit von Wärmeströme (adiabatisch) schreibt sich $dU = -PdV$ (U interne Energie, P Druck, V Volumen)

$$dU + PdV = 0 \Rightarrow d(\rho c^2 a^3) + Pd(a^3) = 0$$

verallgemeinernd $P = w\rho c^2$ (mit w konst.)

$$\Rightarrow \dot{\rho} a^3 + 3\rho a^2 \dot{a} + 3w\rho a^2 \dot{a} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(w+1) \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(w+1) \int \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Rightarrow \ln(\rho) = -3(w+1) \ln(a) + \text{Konst.}$$

$$\Rightarrow \rho = \text{Konst.} \times e^{\ln(a)^{-3(w+1)}}$$

Allgemeiner Ausdruck für Dichte und Druck

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 a^{-3(w+1)} \text{ und } P = w\rho c^2$$

w	P	ρ
0	0 (Staub)	$\rho_0 a^{-3}$
1/3	> 0 (Strahlung)	$\rho_0 a^{-4}$
-1	< 0 (Dunkle Energie)	ρ_0 (Konstant)

Parameter Definition

- **Hubble Funktion:** beschreibt die relative Expansionsrate des Universums:

Hubble Funktion
$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{da}{adt}$

- Heutige Hubble Konstante $H_0 = H(t_0)$

$$H_0 \approx 70 \frac{km}{s.Mpc} \quad [s^{-1}]$$

- Umkehrwert der Hubble Konstante ist die Hubble Zeit:

$$t_H = \frac{1}{H_0} = 14 \text{ Mrd Jahre}$$

- **Kritische Dichte ρ_{cr} :** Entspricht die Dichte, bei der gerade das Universum flach ist.

Kritische Dichte
$\rho_{cr}(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$

- Heutiger Wert $\rho_{cr,0} = 9.20 \cdot 10^{-30} \text{ g.cm}^{-3}$
(eine Galaxienmasse pro Mpc^3
oder 1 Atom pro m^3)

- Mit $\lambda = 0$,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} \iff H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} \iff 1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho - \frac{Kc^2}{a^2H^2}$$

$$\iff \frac{\rho}{\rho_{cr}} - 1 = \frac{Kc^2}{a^2H^2} \implies$$

$\rho > \rho_{cr}$	K = +1 (Sphärisch)
$\rho = \rho_{cr}$	K = 0 (Flach)
$\rho < \rho_{cr}$	K = -1 (Hyperbolisch)

Parameter Definition

- **Relative Dichte Parameter:** Es ist bequem und nützlich, für die Dichtebeiträge Dimensionslose Parameter einzuführen und Expansionsrate des Universums auf den heutigen Wert zu beziehen. (Parameter mit Index 0)

Rel. Materie Dichte Parameter

$$\Omega_m(t) = \frac{\rho_m(t)}{\rho_{cr}(t)}$$

Rel. Strahlung Dichte Parameter

$$\Omega_r(t) = \frac{\rho_r(t)}{\rho_{cr}(t)}$$

Kosmologische Konstante Parameter

$$\Omega_\lambda(t) = \frac{\lambda c^2}{3H^2(t)}$$

Rel. Krümmungsparameter

$$\Omega_k(t) = -\frac{K c^2}{H^2(t)}$$

1. Friedmann Gleichungen

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_r + \rho_m) - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\lambda c^2}{3} \quad \text{1. Friedmann Gleichung}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\Omega_{r,0}\rho_{cr,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}\rho_{cr,0}}{a^3} \right) - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\lambda c^2}{3}$$

$$H^2 = \frac{\cancel{8\pi G} 3H_0^2}{\cancel{3} \cancel{8\pi G}} \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} \right) - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\lambda c^2}{3}$$

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} - \frac{Kc^2}{a^2 H_0^2} + \frac{\lambda c^2}{3H_0^2} \right)$$

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{K,0}}{a^2} + \Omega_{\lambda,0} \right)$$

$$H^2 = H_0^2 E^2$$

mit $E^2 = \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{K,0}}{a^2} + \Omega_{\lambda,0} \right)$
Expansionsfunktion

$$\rho = (\rho_r + \rho_m) \quad H = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_r = \rho_{r,0} a^{-4} = \Omega_{r,0} \rho_{cr,0} a^{-4} \\ \rho_m = \rho_{m,0} a^{-3} = \Omega_{m,0} \rho_{cr,0} a^{-3} \end{array} \right.$$

$$\rho_{cr,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$\Omega_{\lambda,0} = \frac{\lambda c^2}{3H_0^2} \quad \Omega_{K,0} = -\frac{Kc^2}{H_0^2}$$

Friedmann Gleichungen

Friedmann Gleichungen bezogen auf heutigen Dichteparameter

$$H^2(a) = H_0^2 E^2(a) = H_0^2 \left[\Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\lambda,0} - \frac{Kc^2}{a^2 H_0^2} \right]$$

Gleichung auf $a = 1$ (Heute):

$$- \frac{Kc^2}{H_0^2} = 1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0} - \Omega_{\lambda,0}$$

Flaches Universum: $\Omega = 1$

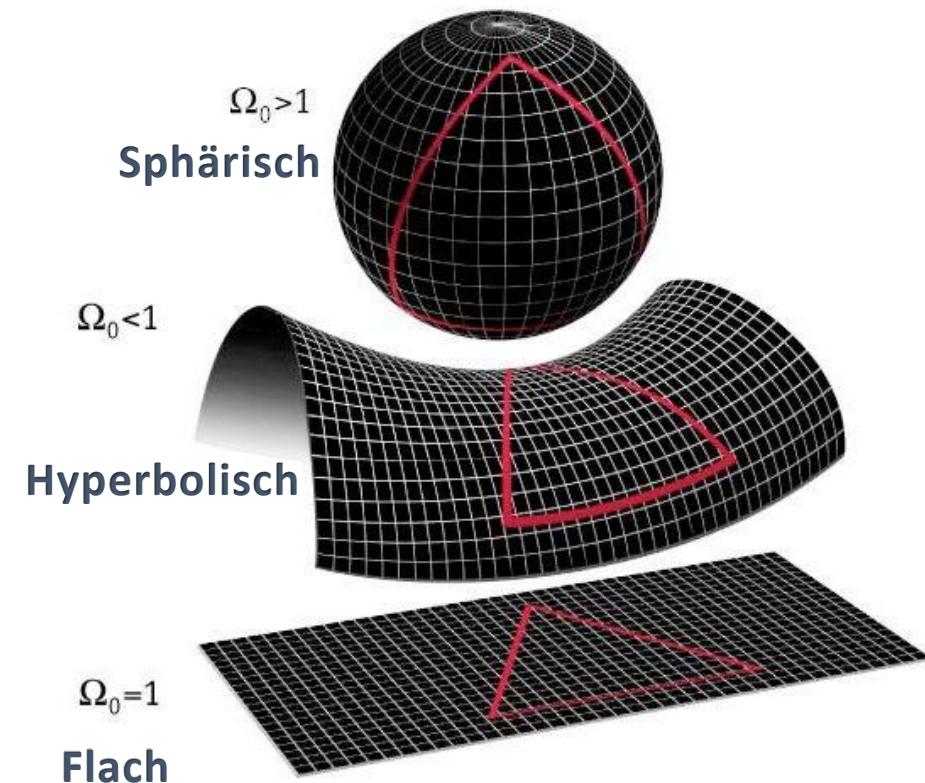
Heutige Parameter

$$\Omega_0 = \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\lambda,0} = 1 + \frac{Kc^2}{H_0^2}$$

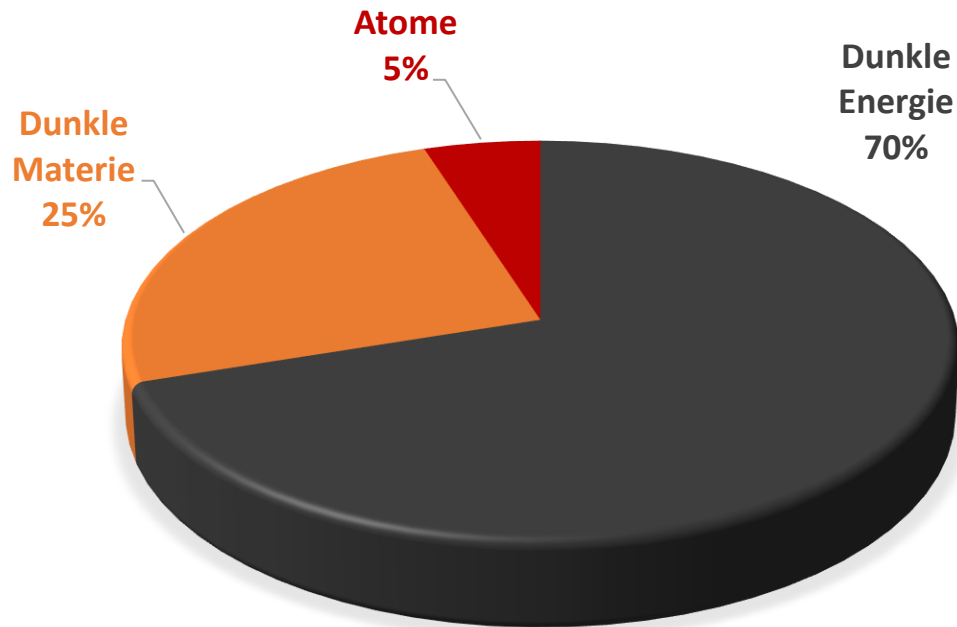
- Messungen aus dem CMB beweisen dass $\Omega_0 = 1$ sein muss => Universum ist flach
- **Flachheitsproblem:** Warum ist das Universum flach? (**Kosmologische Inflation** ist die am meisten akzeptierte Lösung)



Vertiefung:
[Kosmische Inflation](#)



Parameter Bestimmung

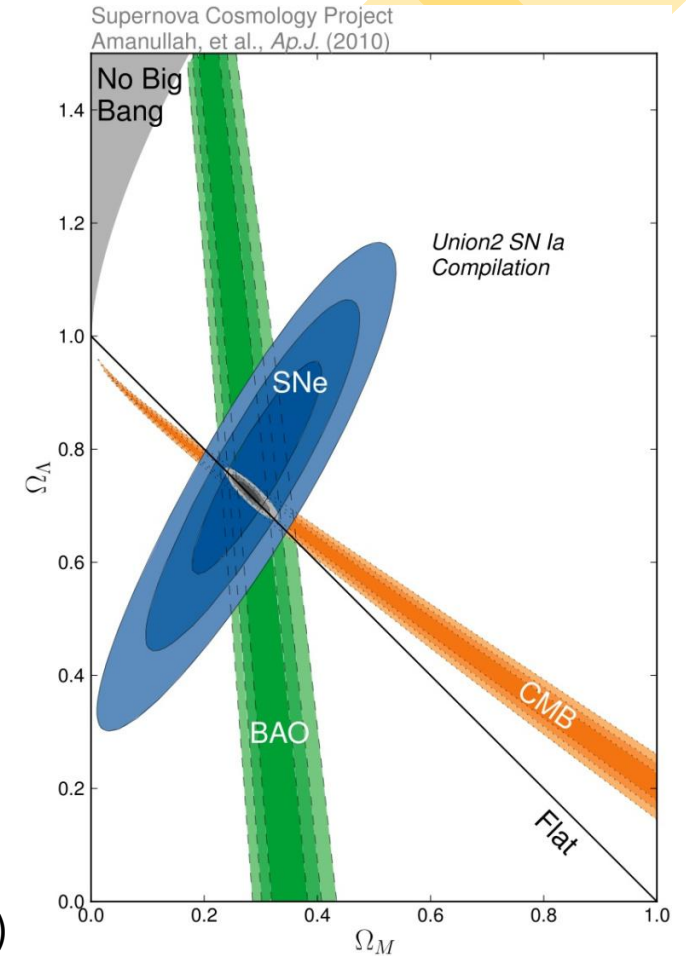


Größe	Symbol	Wert
Hubble-Konstante	H_0	$70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Materiedichte	$\Omega_{m,0}$	0,3
Strahlungsdichte	$\Omega_{r,0}$	$8,5 \cdot 10^{-5} \approx 0$
Kosmologische Konstante	$\Omega_{\lambda,0}$	0,7

- Parameter Bestimmung durch:
 - CMB (Hintergrundstrahlung)
 - BAO (Großräumige Strukturen)
 - Supernovae Typ Ia
 - Gravitationslinseneffekt



Vertiefung: [Dunkle Materie](#)



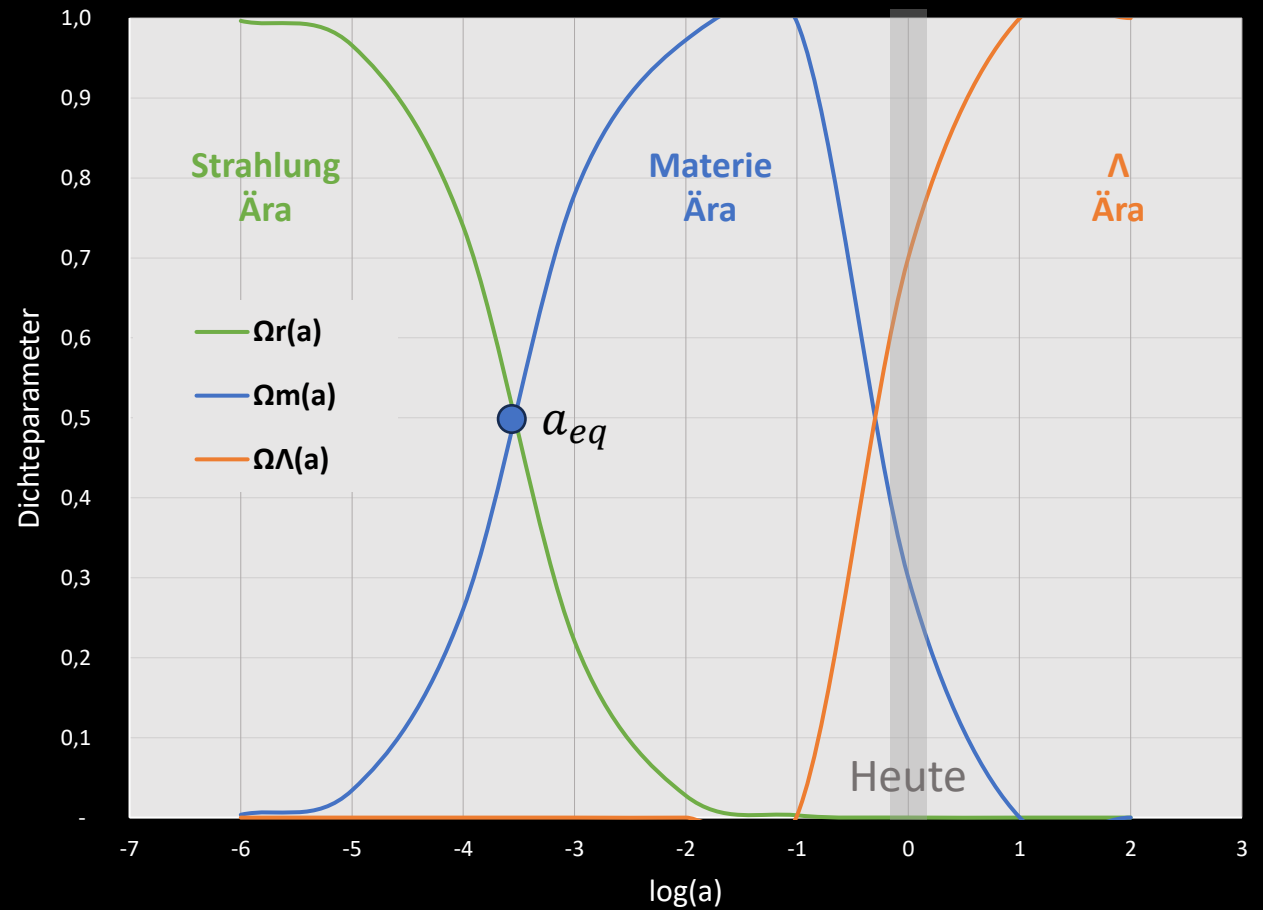
Zeitliche Entwicklung der relativen Dichteparameter

- **Die zeitliche Entwicklung der Dichteparameter ergibt sich aus:**

$$\Omega_r = \frac{\Omega_{r,0} \cdot a^{-4}}{E(a)^2}; \quad \Omega_m = \frac{\Omega_{m0} \cdot a^{-3}}{E(a)^2}; \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{E(a)^2}$$

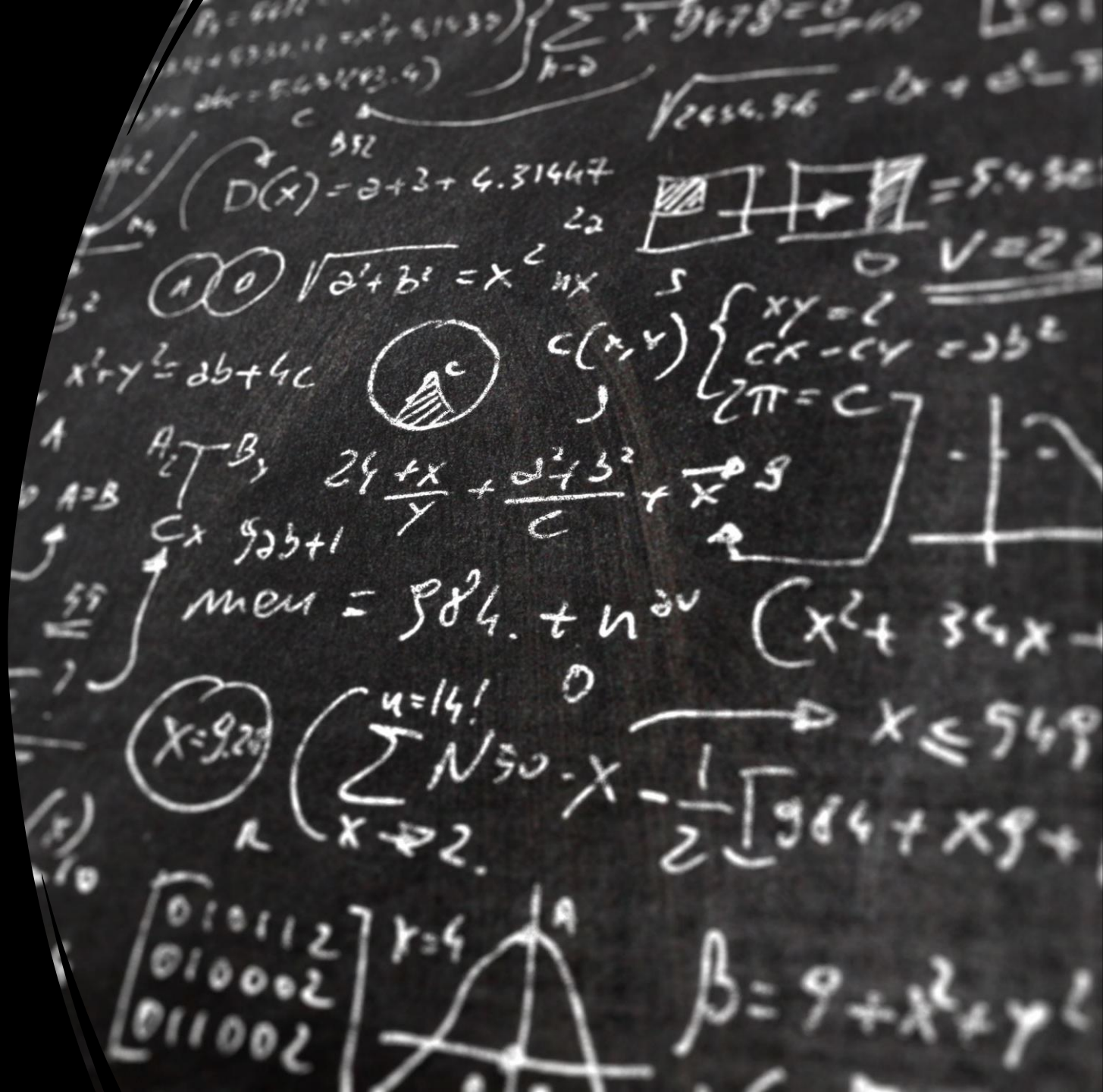
- Im sehr frühen Universum ist die Strahlungsdichte dominant
- Bei $a_{eq} \approx 2,8 \cdot 10^{-4}$ ($Z \approx 3528$) sind relative Strahlung und Materie Dichte gleich
- Bemerkung: a_{eq} ist noch weit vor der Rekombination ($Z \approx 1100$)
- Heute dominiert der Dichteparameter der kosmologischen Konstante

Entwicklung Relative Dichteparameter [1]



Anwendung der heutigen Dichteparameter (30% Materie und 70% Kosmologische Konstante)

Spezielle Lösungen der Friedmann- Gleichungen



Kosmologische Modelle

- Welche Lösungen für die Friedmann-Gleichungen ?
- Integral ist analytisch nicht lösbar aber es lohnt sich speziellen Fälle zu betrachten

$$H = \pm H_0 E(a)$$

$$\Rightarrow \frac{da}{adt} = \pm H_0 E(a)$$

$$\Rightarrow \frac{da}{H_0 a E(a)} = \pm dt$$

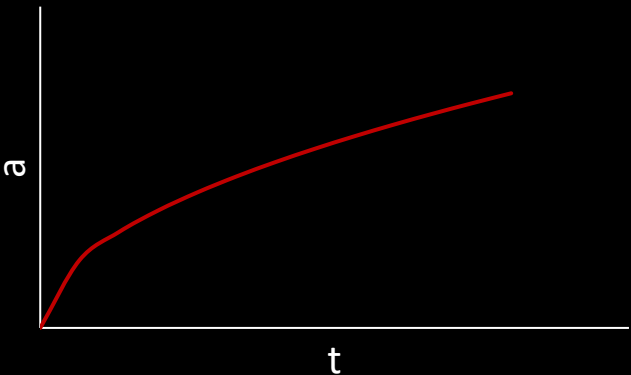
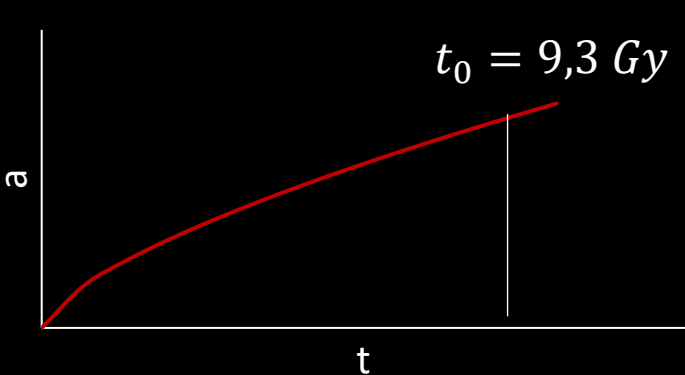
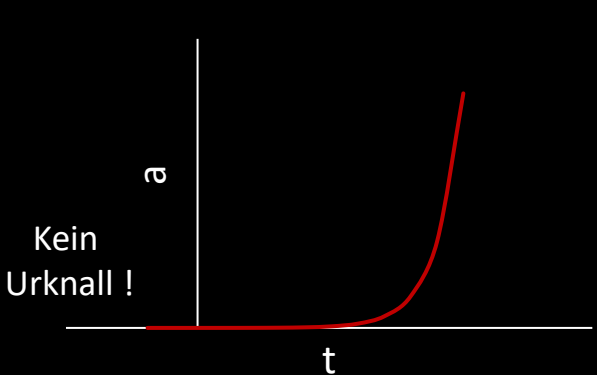
$$\Rightarrow t = \pm \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da}{a E(a)}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da}{a(\Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\lambda,0} - \frac{Kc^2}{H_0^2}a^{-2})^{1/2}}$$

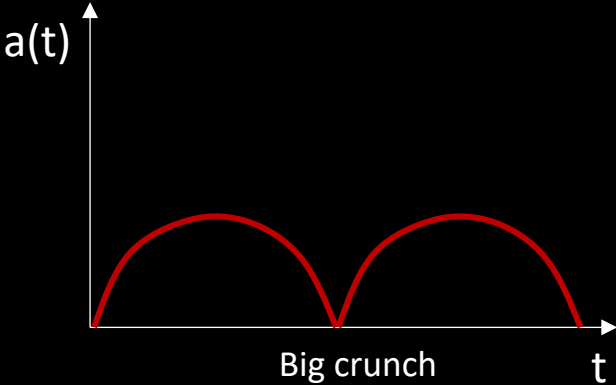
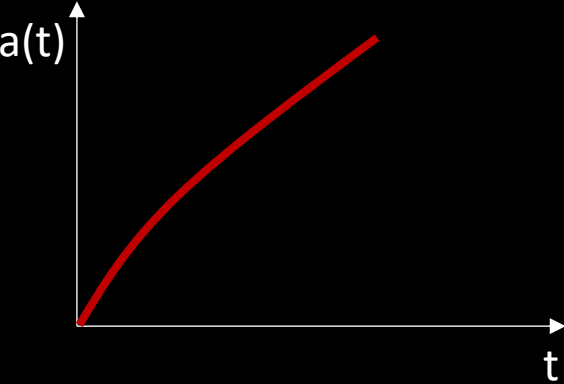
Vielzahl von Modellen je nach heutigen Parameter Werte

Wir suchen einen Ausdruck für $a(t)$...

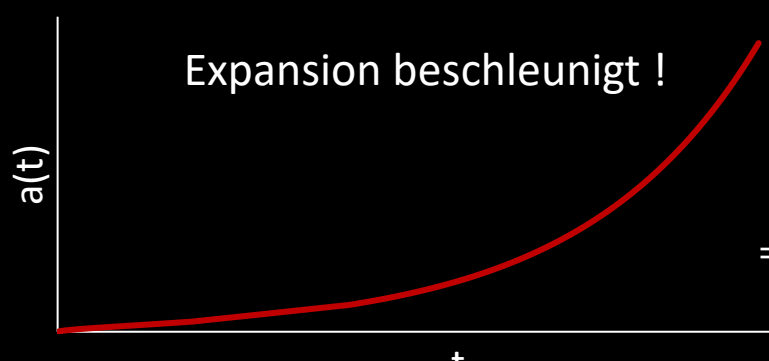
Kosmologische Modelle mit $k = 0$

	Strahlungsdominierte Ära (Frühes Universum)	Materiedominierte Ära (Einstein - de Sitter)	Spätes Universum (De Sitter)
Parameters	$\Omega_{r,0} = 1$ ($\Omega_{m,0} = \Omega_{\lambda,0} = 0$)	$\Omega_{m,0} = 1$ ($\Omega_{r,0} = \Omega_{\lambda,0} = 0$)	$\Omega_{\lambda,0} = 1$ ($\Omega_{m,0} = \Omega_{r,0} = 0$)
$E(a)$	$E(a) = \sqrt{\Omega_{r,0} a^{-4}}$	$E(a) = \sqrt{\Omega_{m,0} a^{-3/2}}$	$E(a) = \sqrt{\Omega_{\lambda,0}} = 1$
Lösung	$\Rightarrow t = \frac{a^2}{2H_0} \Rightarrow a(t) \sim t^{1/2}$	$\Rightarrow t = \frac{2a^{3/2}}{3H_0} \Rightarrow a(t) \sim t^{2/3}$	$\Rightarrow t = \frac{\ln(a)}{H_0} \Rightarrow a(t) = e^{H_0 t}$
$a(t)$			

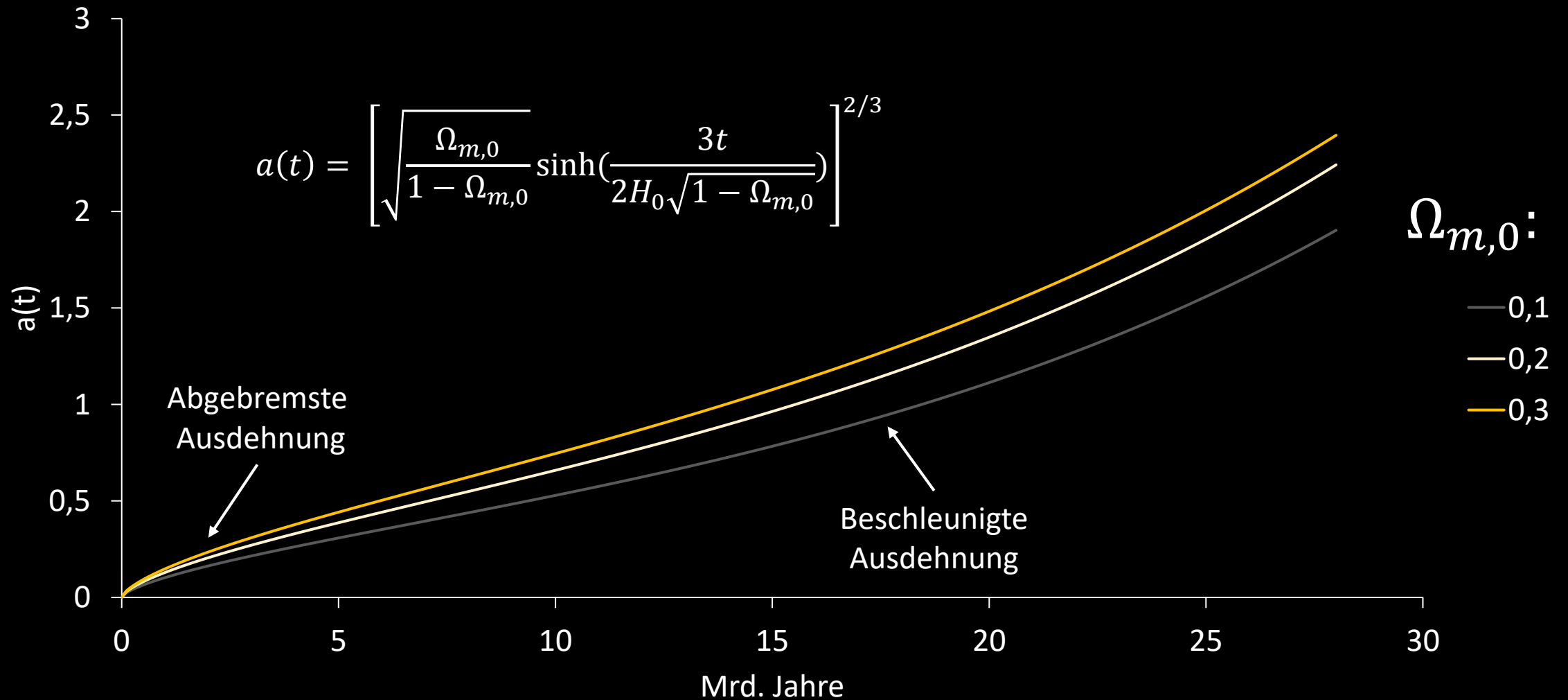
Kosmologische Modelle mit $k \neq 0$

	Friedmann Universum (Hypersphäre)	Friedmann Universum (Hyperbolisch)
Parameters	$K = 1 \Rightarrow \Omega_{m,0} > 1$ ($\Omega_{r,0} = \Omega_{\lambda,0} = 0$)	$K = -1 \Rightarrow \Omega_{m,0} < 1$ ($\Omega_{r,0} = \Omega_{\lambda,0} = 0$)
$E(a)$	$E(a) = \sqrt{\Omega_{m,0} a^{-3} - (\Omega_{m,0} - 1) a^{-2}}$	$E(a) = \sqrt{\Omega_{m,0} a^{-3} + (1 - \Omega_{m,0}) a^{-2}}$
Lösung	Substitution: $a = \frac{\beta}{2} (1 - \cos u)$, $\beta = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1}$ $t = \frac{\beta}{2 H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} - 1}} (u - \sin u)$ (1)	Es lässt sich beweisen: $t \rightarrow \infty \Rightarrow a \propto t$ (1)
$a(t)$	 <p style="text-align: center;">Big crunch</p>	

Kosmologische Modelle mit $\Omega_{m,0} + \Omega_{\lambda,0} = 1$

	$\Lambda - CDM$
Parameters	$\Omega_{m,0} + \Omega_{\lambda,0} = 1$ (und $K = 0$)
E(a)	$E(a) = \sqrt{\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\lambda,0}}$
Lösung	<p>Mit Substitution: $u = a^{3/2}$</p> $t(a) = \frac{2}{3H_0\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \operatorname{arcsinh} \left[\sqrt{\frac{1-\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}}} a^{3/2} \right] \Rightarrow a(t) = \left[\sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{1-\Omega_{m,0}}} \sinh(3/2 H_0 \sqrt{1-\Omega_{m,0}} t) \right]^{2/3}$
a(t)	 <p>Expansion beschleunigt !</p> <p>Alter Universum mit $\Omega_{m,0} = 0.3$ $\Rightarrow t_0 = 13,4$ Mrd Jahre</p>

Kosmologische Modelle mit $\Omega_{m,0} + \Omega_{\lambda,0} = 1$



Wann begann die Beschleunigung?

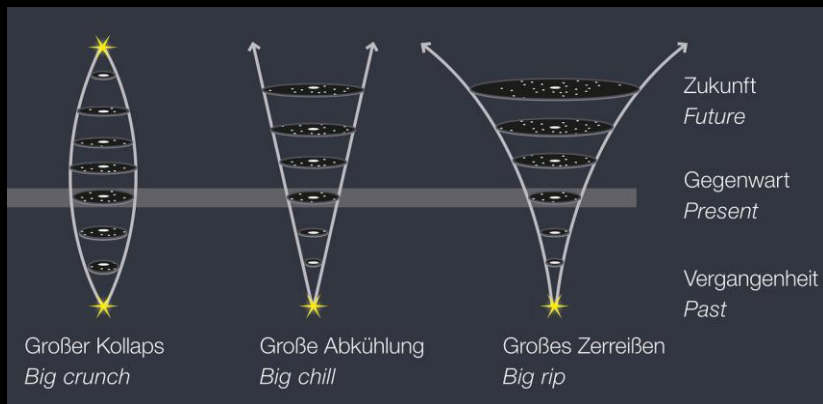
Wendepunkt wenn $\ddot{a} = 0$ (*Keine Beschleunigung, keine Bremsung*)

- 2. Friedmann Gleichung (umgeformt ohne Strahlung): $\frac{\ddot{a}}{a} = H_0^2 \left(-\frac{1}{2}\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\lambda,0} \right)$
- Wendepunkt wenn $\ddot{a} = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\lambda,0} \right) = 0$
- $\Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega_{m,0}}{(1-\Omega_{m,0})}} = \sqrt[3]{\frac{0,3}{2*0,7}} = 0,59 \Rightarrow z = 0,62$

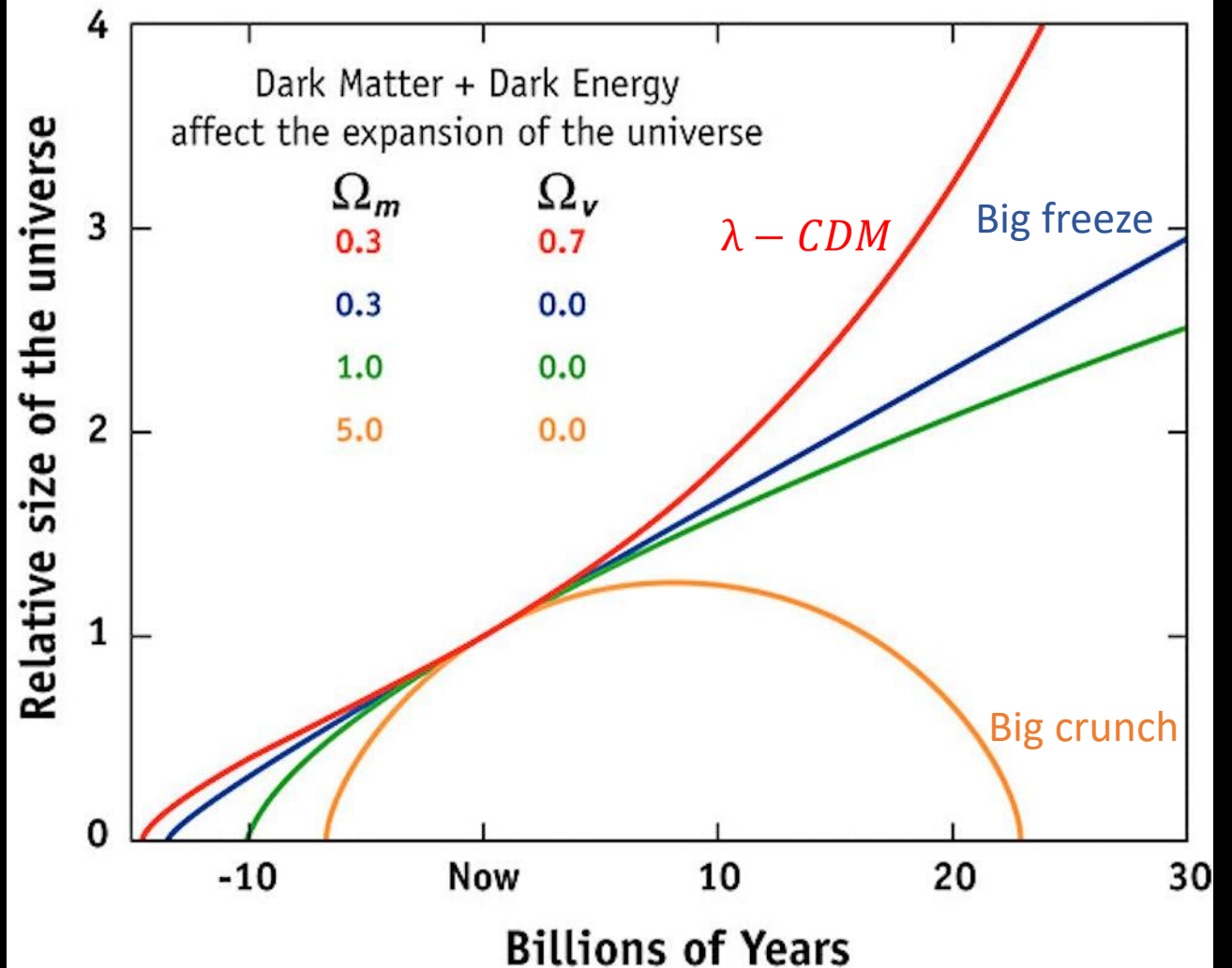
vor ca. 6 Mrd. Jahre !

Zusammenfassung

- Zeitliche Evolution des Universums ist abhängig von den Dichteparametern
- Alter Universum ist abhängig von der Hubble Konstante
- Die Form des Universums wurde hier nicht berücksichtigt. (Topologie)



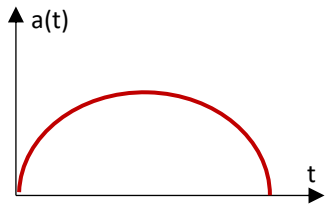
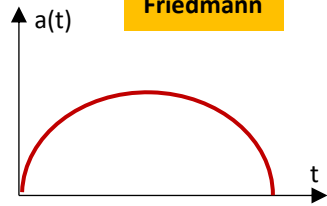
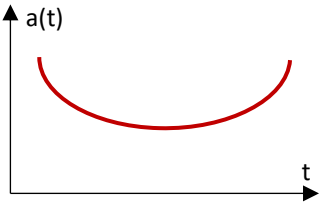
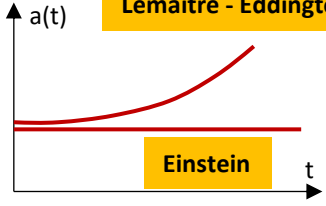
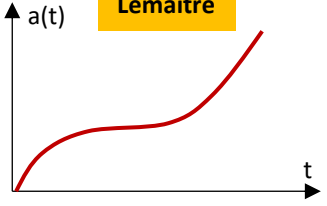
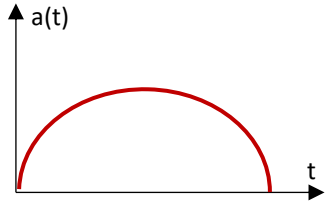
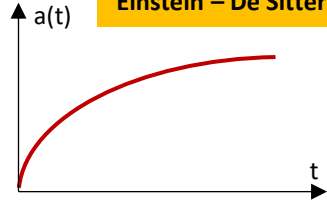
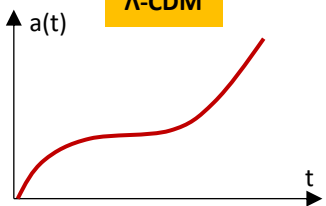
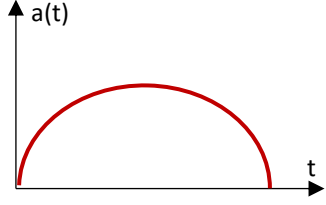
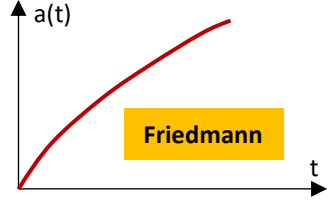
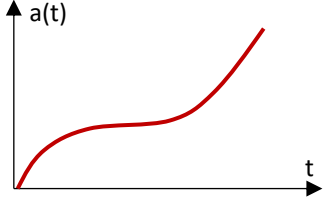
EXPANSION OF THE UNIVERSE



Quelle: [3]

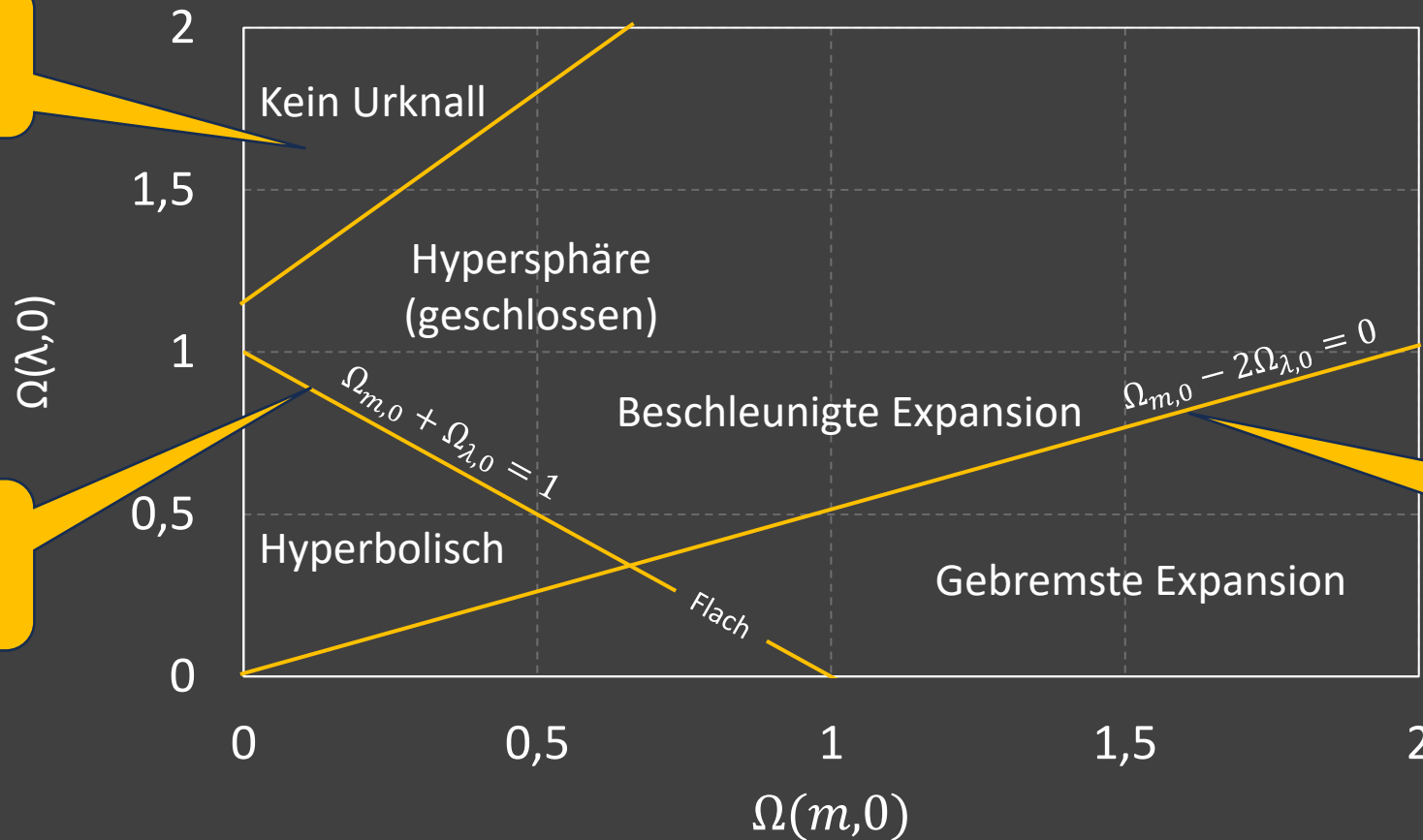


Entwicklung Skalenfaktor bzgl. K und Λ

	$\Lambda < 0$	$\Lambda = 0$	$0 < \Lambda < \Delta_E$	$\Lambda = \Delta_E$	$\Lambda > \Delta_E$
$K = +1$					
$K = 0$					
$K = -1$					

Parameter Diagramm

λ dominiert
 \Rightarrow exponentielle
Expansion



1. Friedmann
Gleichung
wenn $\Omega_0 = 1$

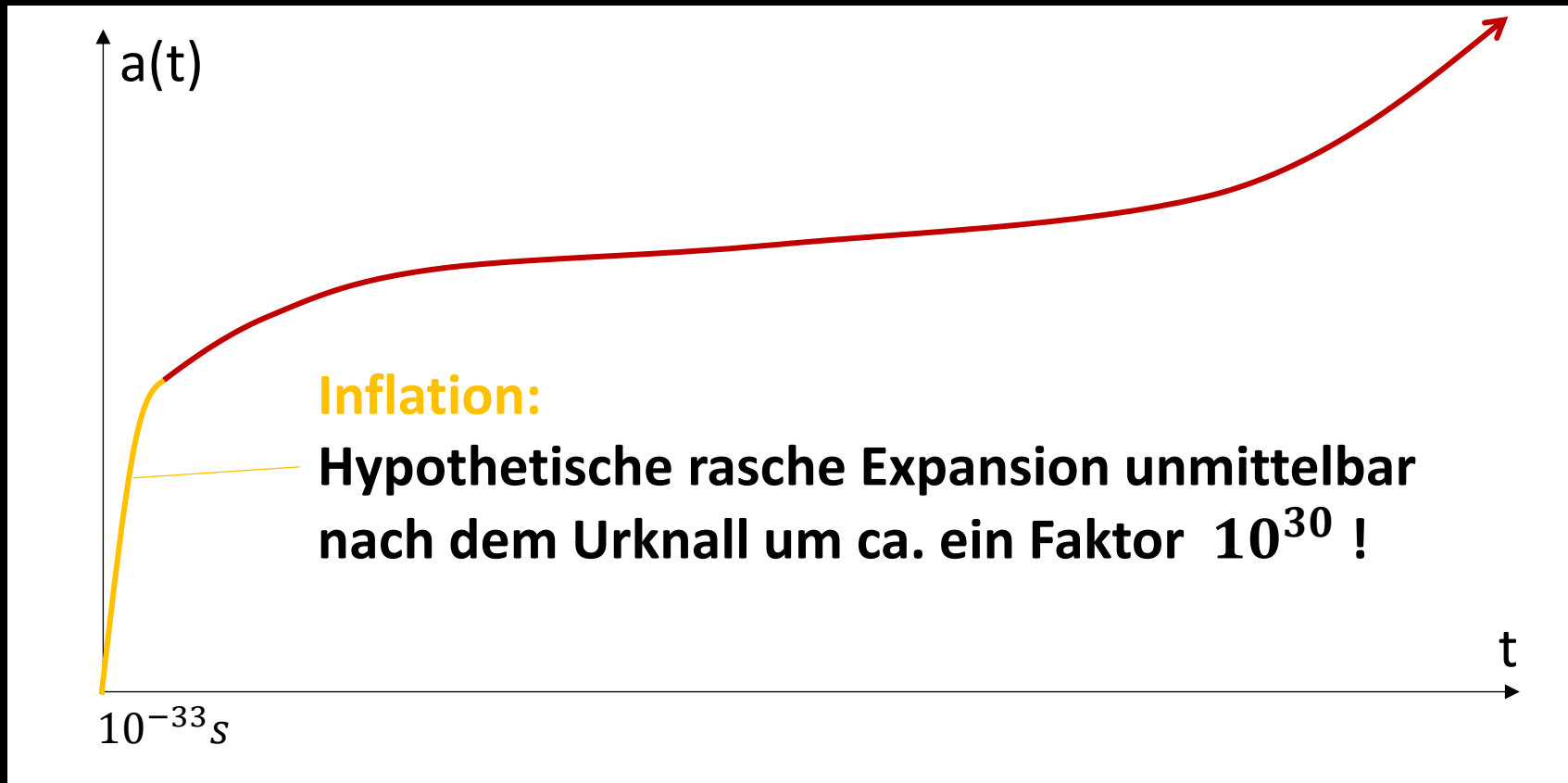
2. Friedmann
Gleichung bei
 $\ddot{a} = 0$



Vertiefung: [Bremsfunktion](#)

1981 Kosmologische Inflation

Alan Guth – Andrei D. Linde



Löst folgende Probleme:

- Größe Universum
- Homogenitätsproblem
- Flachheitsproblem
- Fehlen magnetischer Monopole
- Anisotropie der Hintergrundstrahlung

2. Geschichte einer Expansion 1917-1932

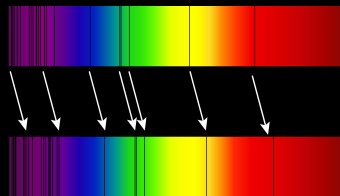
Quelle: [4] [6]



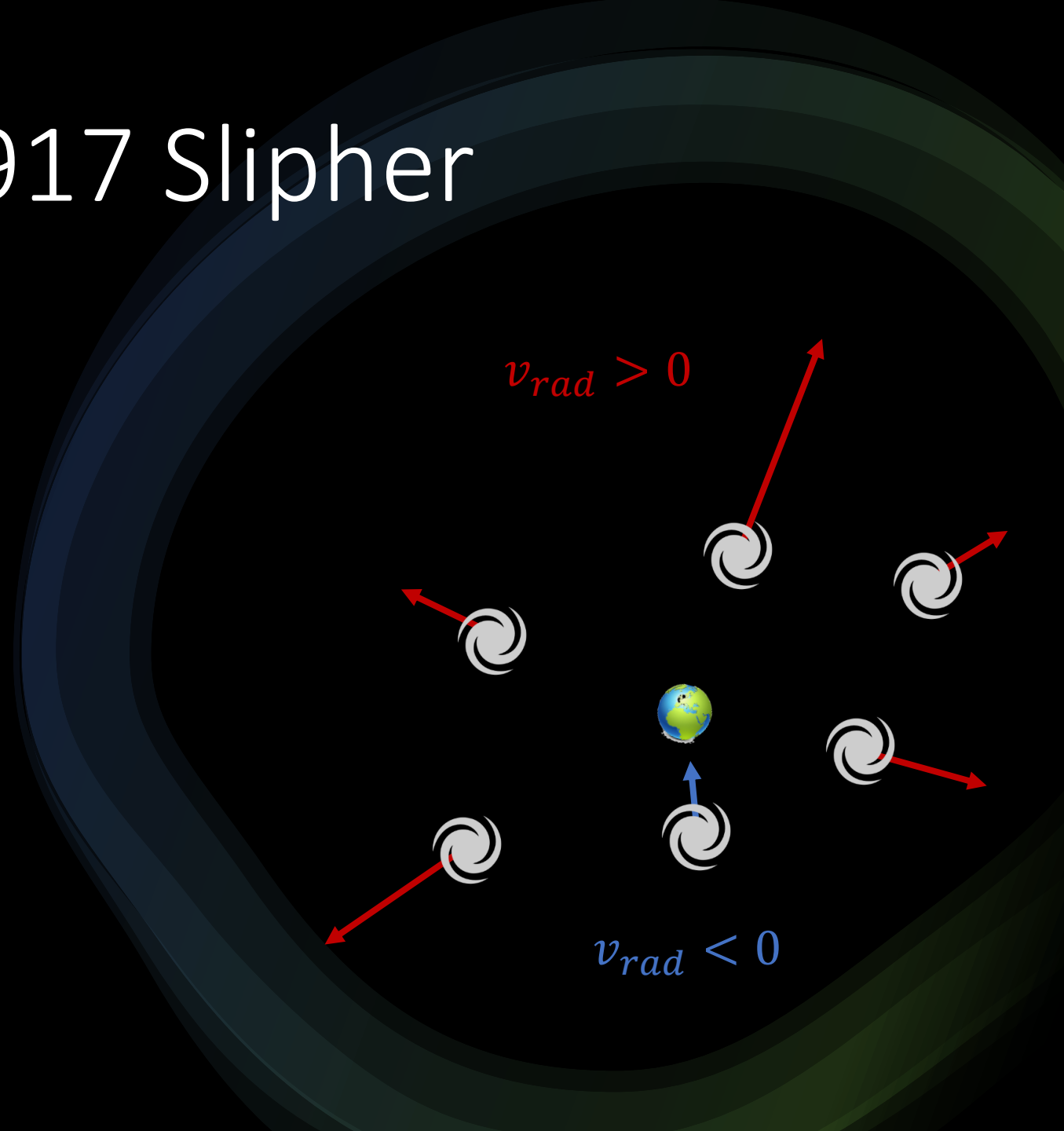


1913-1917 Slipher

- Ausgangssituation: Universum beschränkt auf Milchstraße und hat schon immer existiert
- [Vesto Slipher](#): Messung der Radialgeschwindigkeit von Spiralneben mit Spektroskopie



- **Problem: Warum entfernen sich die Nebeln ?**

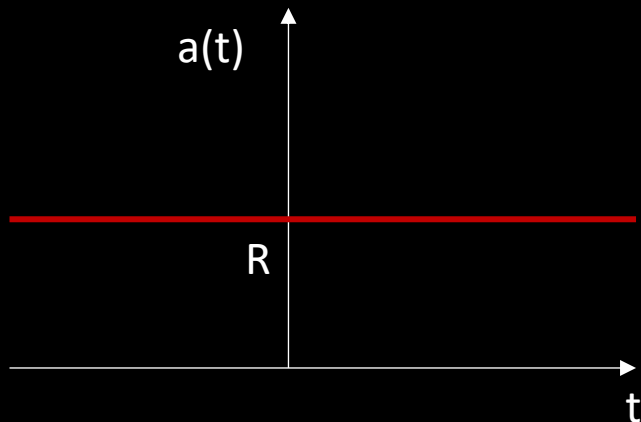




1917 Einstein

„Kosmologische Betrachtung zur allgemeinen Relativitätstheorie“ Berlin, 1917

- **Geburtsstunde der relativistischen Kosmologie.** Einstein verwendet als Erster die Feldgleichung an das ganze Universum
- Einführung einer Kosmologische Konstante damit das Universum statisch bleibt



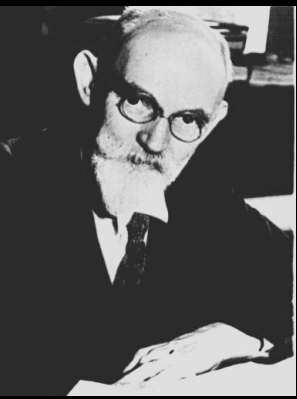
Modell

$K=+1$ (Hypersphäre)

Dichte $\rho = \text{Konst}, P = 0$

$$\lambda_E = \frac{1}{R^2}$$

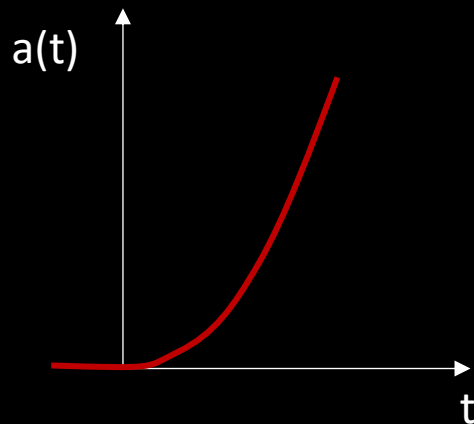
Hypersphäre mit konstanten
Radius R



1917 De Sitter

„On Einstein's theory of Gravitation, and its Astronomical consequences“
Royal Astronomy Society 1917

- Universum ohne Materie mit Konstante λ
- Statische Lösung: Parameter sind zeitunabhängig
- Überraschende Lösung: Modell simuliert eine Expansion



Modell

$K=+1$ (Hypersphäre)

Dichte $\rho = 0, P = 0$

$$\lambda = \frac{3}{R^2}$$

Exponentielle Expansion

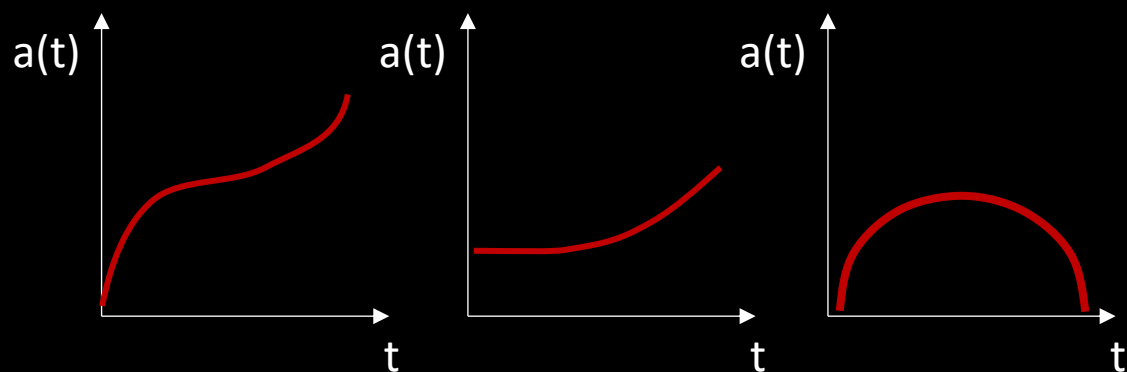


1922-1924 Friedmann

„Über die Krümmung des Raumes“ Zeitschrift für Physik, 1922

„Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes“ Zeitschrift für Physik, 1924

- Studiert dynamische Modelle
- Beschreibt geschlossenen und offenen Universum



Modell

$K = \pm 1$

Dichte $\rho(t)$ variabel, $P = 0$

$\lambda \neq 0, \lambda = 0$

Expansion / Kontraktion



1923 Rotverschiebung Problem



- Slipher: 36/41 Nebeln mit positiver Radialgeschwindigkeit (Rotverschiebung).
- Er publiziert die Ergebnisse nicht !

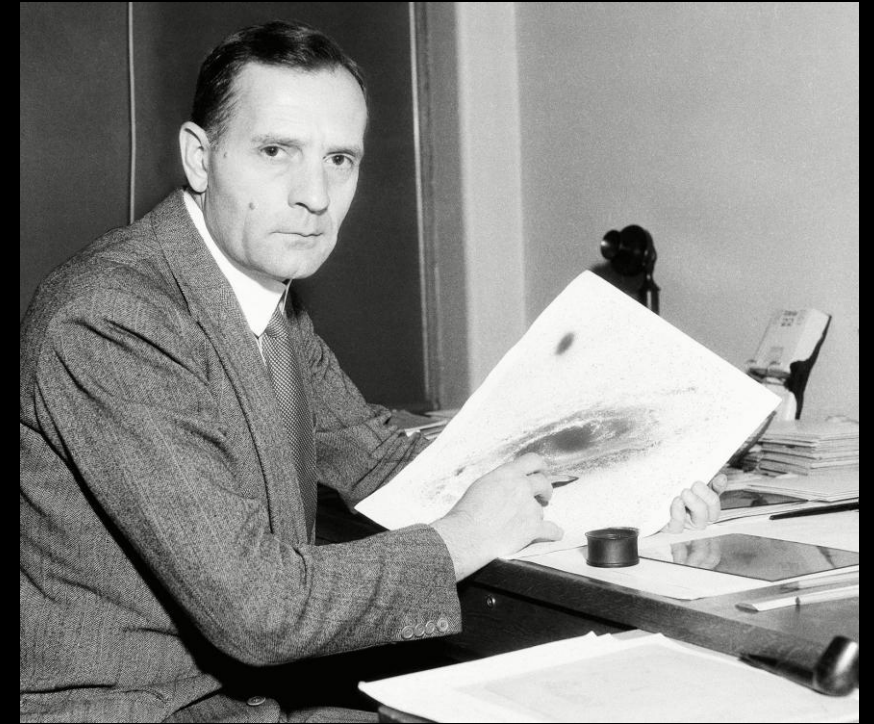
“Eines der mysteriösesten Probleme ist die hohe Geschwindigkeit vieler Nebel, und die meisten Nebel entfernen sich vom Sonnensystem. „

Sir Arthur Stanley Eddington
[The Mathematical Theory of Relativity](#)

- Eddington favorisiert das De Sitter Weltmodell

1925 Hubble

- Spiralnebeln sind extra Galaktisch
- beendet die Große Debatte Curtis-Shapley
- Entfernungsmessung mit Cepheiden:
pulsationsveränderlichen Sterne
(Henrietta Swan Leavitt 1912)



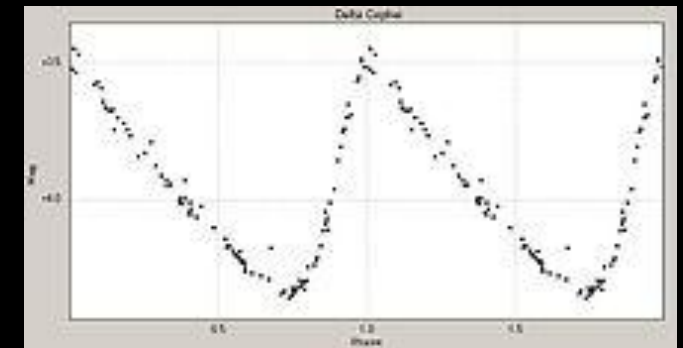
NGC6822
1925



M33
1926



M31
1929



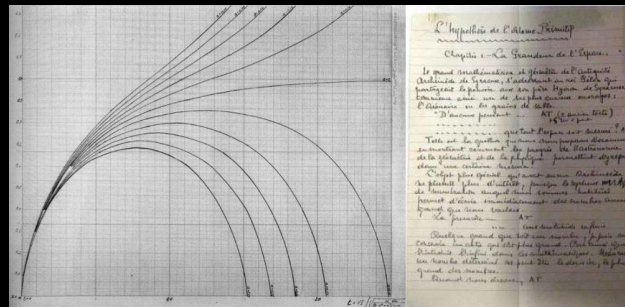
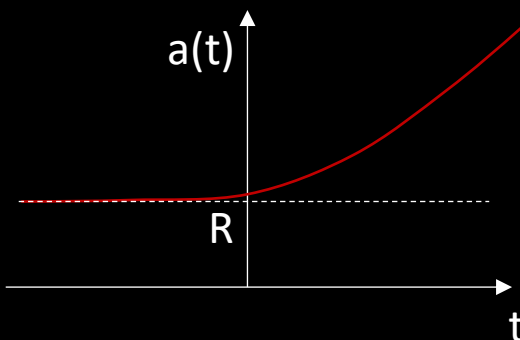
Lichtkurve einer Cepheiden - [Wiki](#)



1927 Lemaître

„Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses galactiques“ Bruxelles, 1927

- Veröffentlicht (nur auf französisch) ein Artikel über die Expansion des Universums.
- Erste richtige Interpretation der Rotverschiebung (Nebel entfernen sich wegen der Expansion des Raums)
- Findet das Hubble Gesetz $\frac{\dot{R}}{R} = \frac{v}{rc}$ (2 Jahre vor Hubble)



1927-1931 Manuskript

<https://blogs.futura-sciences.com/luminet/2018/02/20/limage-de-lorigine-a-travers-science-litterature-2-2-xviiiie-siecle-a-aujourd'hui/>

Modell

$K=+1$

Dichte $\rho(t), P(t)$ variabel

$\lambda = \lambda_E$

Beschleunigte Expansion ohne Urknall

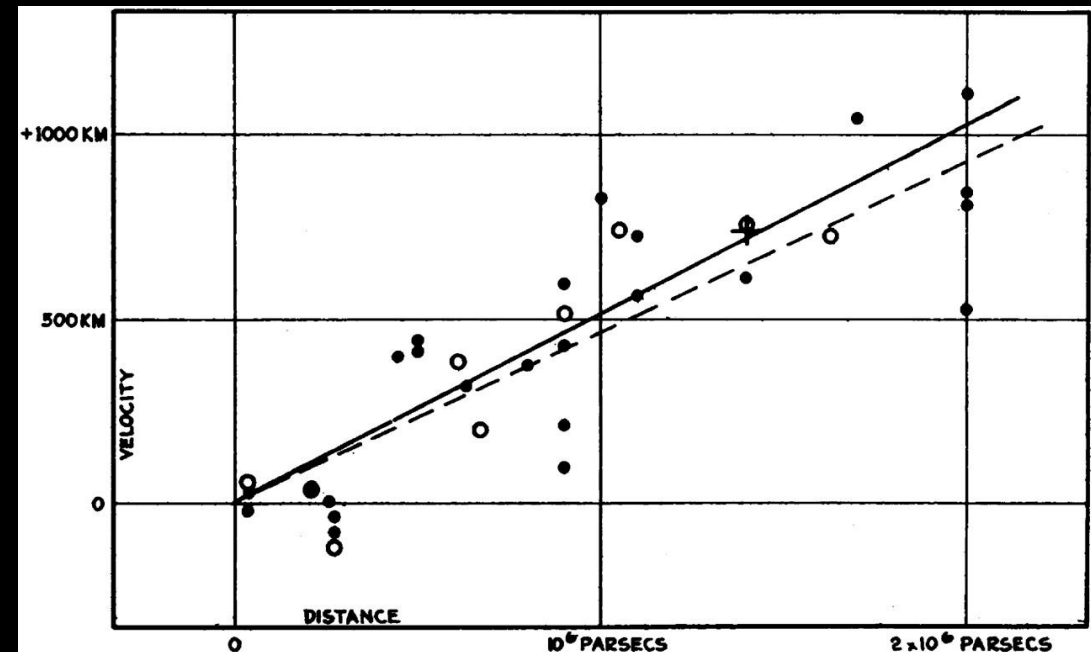


1929 Hubble

„A relation between distance and radial velocity among extra galactic Nebulae“
Mt Wilson Observatory, 1929

- Veröffentlicht die lineare Beziehung:
$$v = H_0 d$$
- Distanzbestimmung durch Cepheiden
- Stichprobegröße: 24 Galaxien, davon 20 Messungen von Slipher (wurde im Artikel nicht zitiert) und 4 von Humason
- Ergebnisse wurden von Hubble nicht interpretiert: Er hatte nie an einer Expansion des Universums geglaubt !

Hubbles Data 1929



<https://www.pnas.org/doi/full/10.1073/pnas.15.3.168>

$H = 530 \text{ Km/s/Mpc}$

(Lemaître (1927): $H = 575 \text{ km/s/Mpc}$)



M. Humason erinnert sich:

Hubble & Humason (1931), using the new radial-velocity observations by Humason (1931), to establish the linear expansion of the Universe beyond reasonable doubt. This work strengthened and confirmed the first hints of this expansion collected by Wirtz (1924), Lundmark (1925), Lemaître (1927), Hubble (1929), and de Sitter (1930).

In his memoirs, collected during an oral history project (www.aip.org/history/ohilist/4686.html) undertaken by the American Institute of Physics (Shapiro 1965), Milt Humason is quoted as follows:

The velocity-distance relationship started after one of the IAU meetings, I think it was in Holland. [The Third IAU meeting took place in Leiden in the Netherlands, 1928 September 5 – 13.] And Dr. Hubble came home rather excited about the fact that two or three scientists over there, astronomers, had suggested that the fainter the nebulae were, the more distant they were and the larger the red shifts would be. And he talked to me and asked me if I would try and check that out.



1930 Eddington

„On the instability of Einstein's spherical world“
Royal Astronomical Society, 1930

- 1919 Bestätigung Einsteins ART: Lichtstrahl wird durch das Gravitationsfeld gekrümmt (Sonnenfinsternis Mai 1919)
- 1923 „The Mathematical Theory of Relativity“ Cambridge: beschreibt das Weltmodell von Einstein und De Sitter. Favorisiert das Weltmodell von De Sitter aufgrund der Ergebnisse von V. Slipher
- 1930: „**On the instability of Einstein's spherical world**“: beweist Statisches Modell von Einstein ist unstabil und fördert dynamische Modelle
- 1930: Erfährt von G. Lemaître Artikel und fordert Übersetzung. Später wird es „Eddington – Lemaître Modell“ genannt.



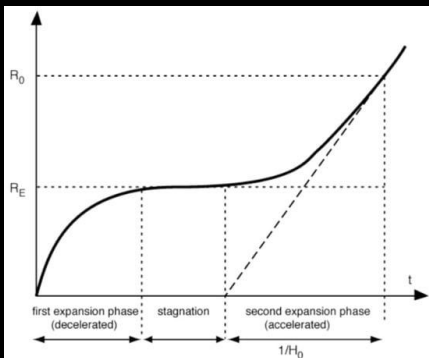
1931 Lemaître

„The Expanding Universe“ The Royal Astronomical Society, 1931

- Veröffentlicht gleichzeitig:

1- Übersetzung seines Artikels von 1927 aber mit selbst Zensur ! (er verzichtet auf $V=HD$)

2- „The Expanding Universe“ mit der Idee einer Singularität „Uratom“



Eddington: „abstoßend“

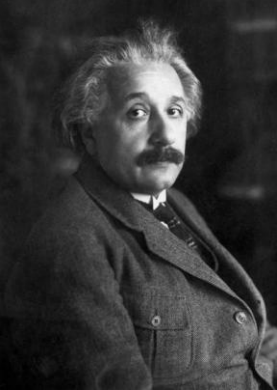
Modell

$K=+1$ (Elliptisch)

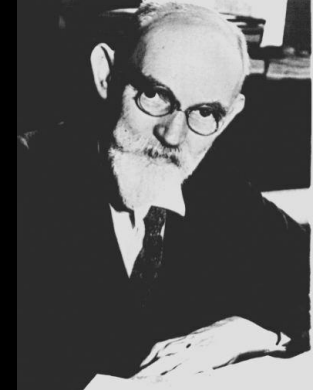
Dichte $\rho(t)$, $P(t)$ variabel

$\lambda > \lambda_E$

Expansion zuerst abgebremst dann beschleunigt

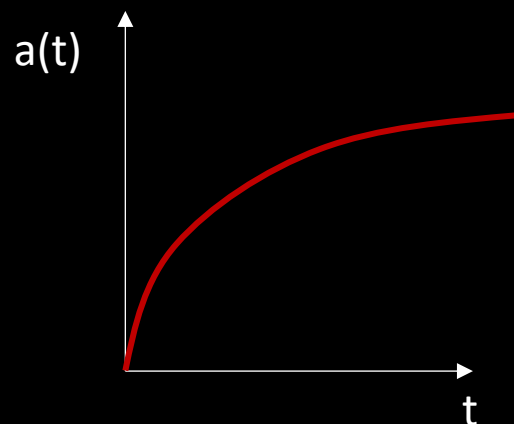


1932 Einstein & De Sitter



„On the Relation between the Expansion and the Mean density of the Universe“ Mt Wilson Observatory, 1932

- Einstein lehnt die Kosmologische Konstante Λ für immer ab
- Einstein „Eselei“?
- Plagt die Kosmologie für 60 J.



Modell

$$K=0$$

$$\text{Dichte } \rho(t), P = 0$$

$$\lambda = 0$$

Gebremste Expansion

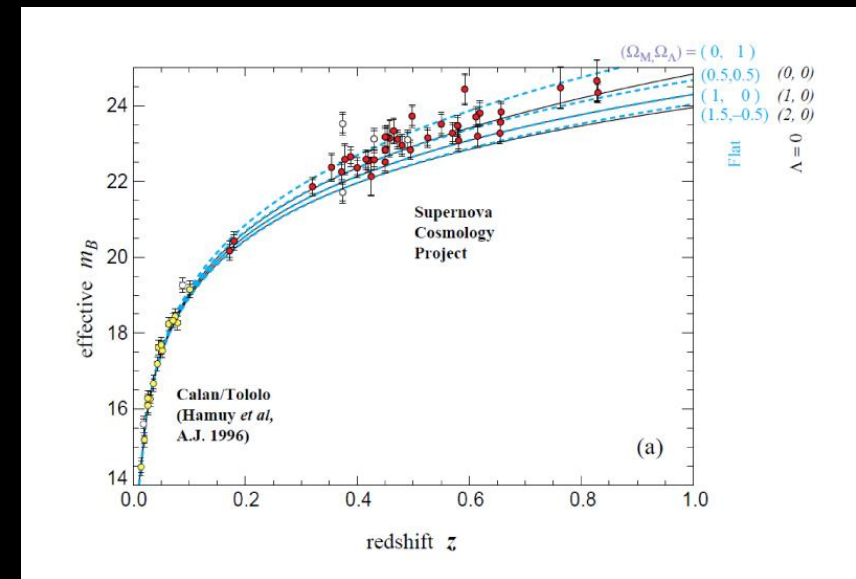
1998 Expansion beschleunigt



- 2 unabhängige Projekte Supernova Cosmology Project & High-Z Supernovae Search Team entdecken die Beschleunigung der Kosmischen Expansion
- Methodik: Messung der Abhängigkeit Entfernung zu Rotverschiebung $d(z)$ von Supernovae Typ Ia.
Stichprobegröße: 42 Supernovae mit $0.18 < z < 0,83$
- Daraus resultierte eine relative Materiedichte von $\Omega_{m,0} = 0,28$ und das Modell mit $\lambda = 0$ muss verworfen werden
Comeback der Kosmologischen Konstante λ
- 2011 Nobelpreis: S Perlmutter, A Riess, B.P Schmidt



Supernova Cosmology Project



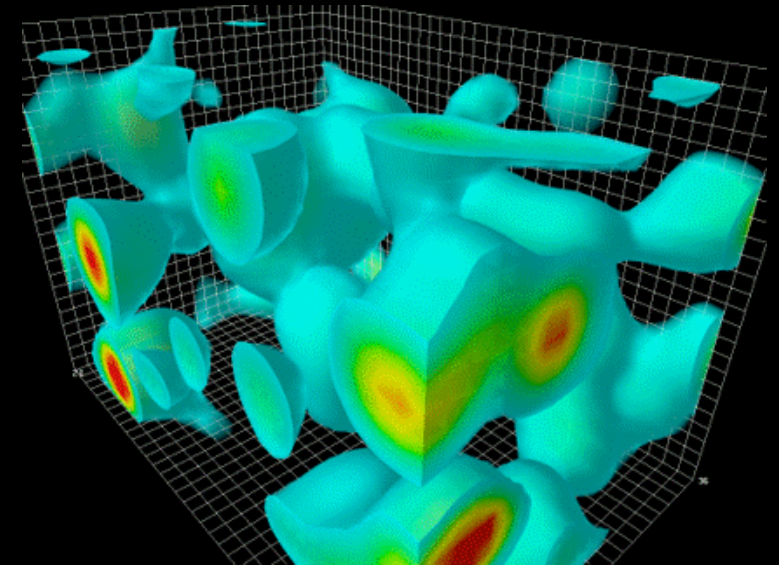
<https://iopscience.iop.org/article/10.1086/307221/meta>

$$\Omega_m = 0,28 \pm 0,09 \text{ und } \lambda > 0$$

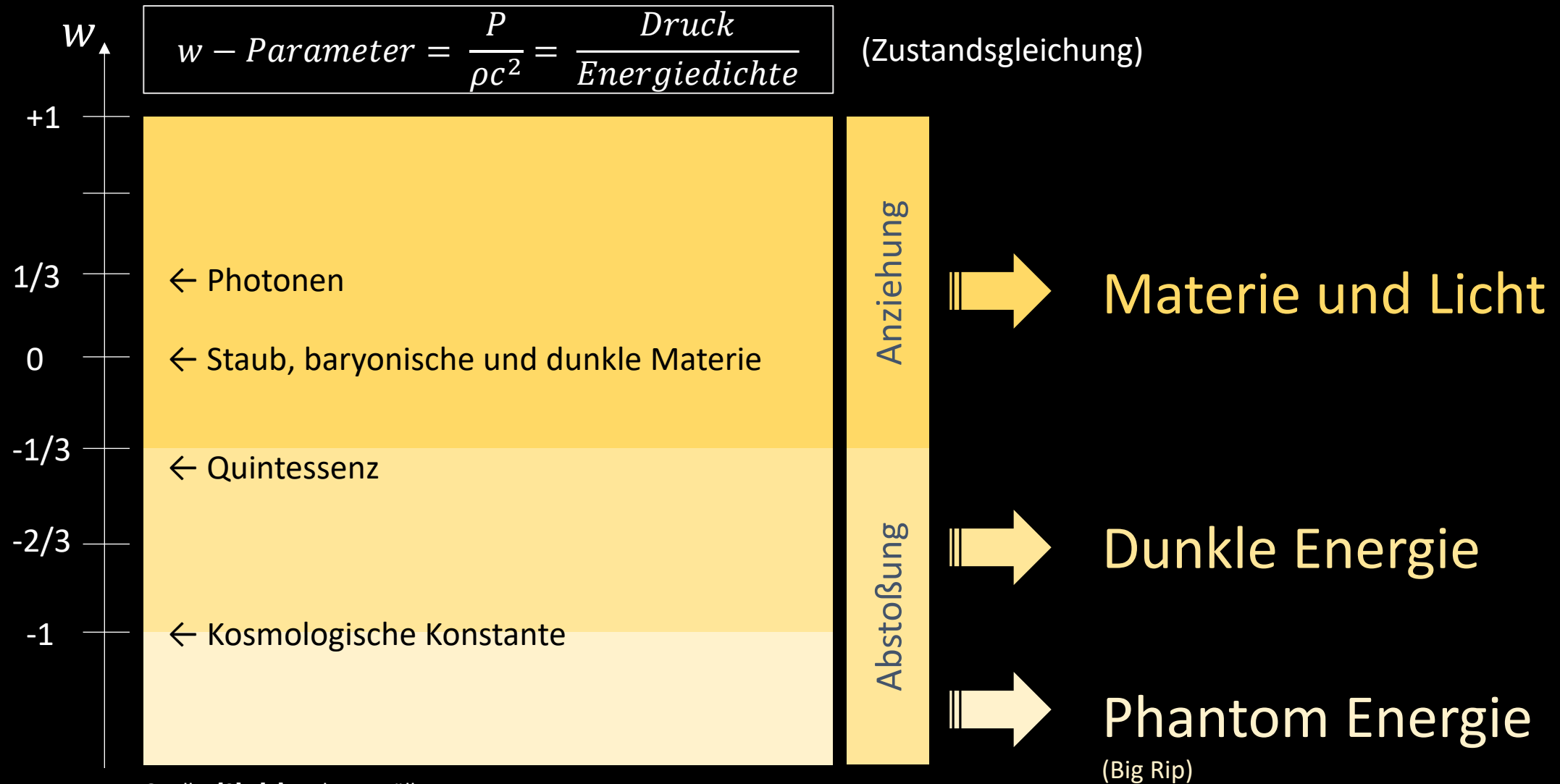
Einstein - De Sitter Modell wird verworfen !

Was bedeutet λ ? (Dunkle Energie)

- 1998 **Comeback der Kosmologische Konstante (als Dunkle Energie):**
 - Bemerkung 1: λ bedeutet eine Konstante Dichte mit dem Wert $\lambda = \frac{8\pi G}{c^2} \rho_\lambda$ [3]
 - Bemerkung 2: ρ_λ Konst. bedeutet auch $P = -\rho_\lambda c^2$ und somit ist die Kondition für eine beschleunigte Expansion erfüllt: $\ddot{a} > 0 \Rightarrow P < -\frac{1}{3}\rho c^2$ (2. Friedmann Gleichung)
- **Negativer Druck wirkt als Gegenkraft zur Gravitation. Somit ist Λ eine "natürliche" Erklärung für die beschleunigten Expansion**
- **Problem: ρ_λ wird als Vakuumenergie Dichte interpretiert. Der Theoretischer Wert (Quantenfeld Theorie) ist aber viel zu hoch!**



Andere Materie- und Energieformen



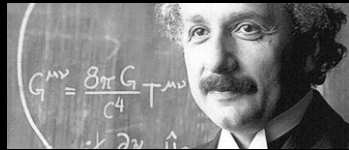
Euclid Weltraumteleskop

- **Mission (ESA):** Untersuchung der Dunklen Materien und Energie
 - Start : Juli 2023
 - Sichtbaren Licht und nahe IR am L2 Punkt
 - Bis $Z = 2$ (ca 10 Mrd Jahre)
- **Ziel:** Folgende Fragen beantworten:
 - Wie verteilt sich die Dunkle Materie?
 - Wie vollzog sich die Ausdehnung des Universums?
 - Verändert sich der Anteil an Dunkler Energie über die Zeit ?
 - Wie formen sich großräumigen Strukturen?
- **Untersuchung mittels**
 - Schwache Gravitationslinsen: Verteilung von Dunkler Materie
 - BAO: Maßstab für Ausdehnung des Universums



Meilensteine in der relativistischen Kosmologie

- **1915**
A. Einstein
veröffentlicht ART



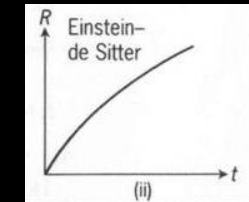
- **1925**
E. Hubble :
Entfernung Nebeln
extra galaktisch



- **1927**
G. Lemaître beschreibt
die Expansion des
Universums



- **1932**
Einstein De Sitter
Universum



- **1917**
V. Slipher. Messung
der Radialgeschw. von
Spiralnebeln
(Rotverschiebung)
- A. Einstein: Erstes
kosmologisches
Modell (Statisch)

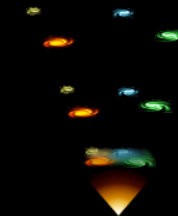
- **1922-1924**
A. Friedmann entwickelt
kosmologische Modelle
mit $k \neq 0$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\lambda c^2}{3}$$

- **1929**
E. Hubble/Humason
entdecken $V = H_0 \cdot D$
($H_0 \approx 500 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$)



- **1931**
G. Lemaître
Geburtstunde der
Urknall Theorie



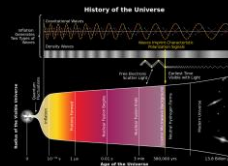
Meilensteine in der relativistischen Kosmologie

- **1946-48**
G Gamov: primordiale Nukleosynthese

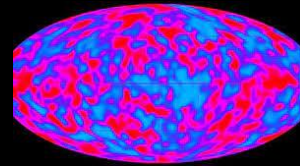
R Alpher, R Herman:
Voraussage CMB

1958
 $H_0 < 100 \text{ km/sMpc}^{-1}$

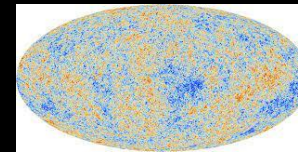
- **1981**
A. Guth:
Hypothese der Inflation



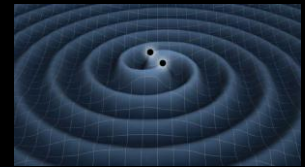
- **1992**
COBE bestätigt 2,7K und Anisotropie des CMB



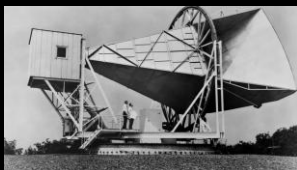
- **2013**
Planck erhöht die Genauigkeit der Parameter Bestimmung



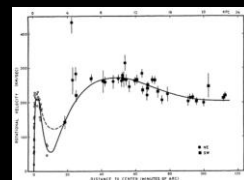
- **2016**
LIGO:
Gravitationswellen durch Kollision schwarze Löcher



- **1965**
A. Penzias & R.W. Wilson entdecken die Hintergrundstrahlung. CMB

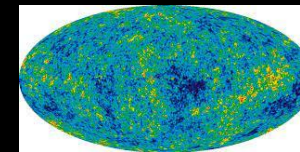


- **1970**
V. Rubin: Rotationsgeschwindigkeit von den Sternen am Außenbezirk der Spiralgalaxien nimmt nicht ab (Dunkle Materie)



- **1998**
S. Perlmutter, B. Schmidt und A. Riess entdecken die Beschleunigung der Expansion (Supernovae als Standardkerzen)

- **2003**
WMAP: Dichteparameter, H_0 Bestimmung



Georges Lemaître

- 1927 Expansion des Universums mit korrekter Interpretation der Radiale Geschwindigkeit und theoretische Herleitung des Hubble-Gesetzes
- 1931 „The Expanding Universe“: Gründung der Urknall Theorie
- 1931 „Der Anfang der Welt vom Standpunkt der Quantentheorie“ wurde zur Geburtsurkunde der Vorstellung vom Urknall
- 1933 Erste Modelle zu Formationen von Galaxien
- 1934 “Evolution of the Expanding Universe”:
 - Erste Interpretation der Kosmologische Konstante als Vakuum Energie (erwähnt $P = -\rho c^2$) !
 - Vorhersage Kosmischer Hintergrund ?

2018 wird von der IAU (Internationale Astronomische Union) das Hubble Gesetz in „Hubble-Lemaître“ umbenannt.



Georges Lemaître
Belgischer Priester und Astrophysiker

1894-1966

Danke



Relevanten Veröffentlichungen

- 1915: V. M. Slipher „Spectrographic observations of nebulae“ – [Link](#)
- 1915: A. Einstein „Die Feldgleichung der Gravitation“
- 1916: A. Einstein „Die Grundlagen der Allgemeinen relativitätstheorie“ – [Link](#)
- 1917: V. Slipher „Nebulae“ - [Link](#)
- 1917: A. Einstein „Kosmologische Betrachtung zur allgemeinen Relativitätstheorie“ - [Link](#)
- 1917: W. de Sitter „On Einsteins theory of gravitation and it´s astronomical consequences“ - [Link](#)
- 1922: A. Friedmann „Über die Krümmung des Raumes“ – Zeitschrift für die Physik - [Link](#)
- 1924: A. Friedmann „Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes“ Zeitschrift der Physik – [Link](#)
- 1927: G. Lemaître „Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques“ - [Link](#)
- 1929: E. Hubble „ A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae“ - [Link](#)
- 1931: G. Lemaître „A homogeneous Universe of constant masss and increasing radius.“ - [Link](#)
- 1931: G. Lemaître „The expanding Universe“ – [Link](#)
- 1931: G. Lemaître „The begining of the world from the point of view of quantum theory“- [Link](#)
- 1932: A. Einstein, W. de Sitter „On the relation between the expansion and the mean density of the universe“- [Link](#)
- 1934: G Lemaître „Evolution of the expanding Universe“ - [Link](#)

Quellen

- [1] „Das kosmologische Standardmodell“ Matthias Bartelmann – Springer 2019
- [2] „Kosmologie der ART“ Skript zum Seminar des Physikalischen Vereins Frankfurt am Main 2015 - Rainer Göhring
- [3] [„Dunkle Energie“ Seminar Vortrag im Institut für Theoretische Physik](#) - Florian Hermann 2014
- [4] „L’invention du Big Bang“ Jean-Pierre Luminet – Editions du Seuil 2014
- [5] [Die zwei Wege des Georges Lemaître zur Erforschung des Himmels](#) - J Hüfner, R Löhken 2016
- [6] Video Conférence J-P Luminet: [La decouverte de l’expansion cosmique](#) - Bibliothèque nationale de France le 10 octobre 2017.
- [7] Video: [100 Jahre Kosmologische Konstante](#) – Andreas Müller
- [8] [The Discovery of the expansion of the Universe](#) – Oyvind Gron -2018
- [9] [Lemaître’s Bib Bang](#) – Jean Pierre Luminet – 2014
- [10] [Editorial Note to “A Homogeneous Universe of Constant Mass and ...”](#) – Jean Pierre Luminet - 2013

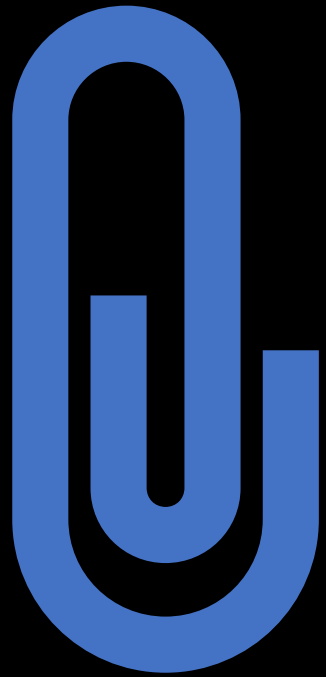




Kosmologie Vorlesungen



- [Cours de Cosmologie par Richard Taillet](#) – Universite Grenoble-Alpes (FRA)
- [Cours de Cosmologie par Aurelien Barrau](#) (FRA)
- [Vorlesung "Sterne und Kosmos" von Prof. Ulrich Walter](#) – LRT TUM (DE)
- [Cosmology Lecture Prof. Leonard Susskind](#) – Stanford (ENG)
- [Relativity by Eigenchris](#) – Cosmology: Video 110a-110f (ENG)



Anhang

Wie groß ist das beobachtbare Universum?

Teilchenhorizont

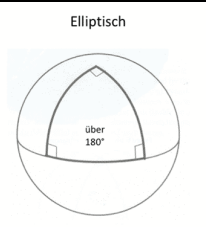
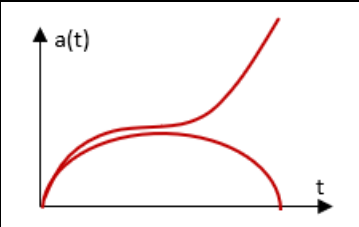

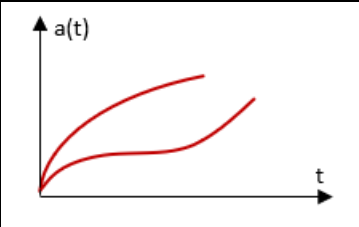
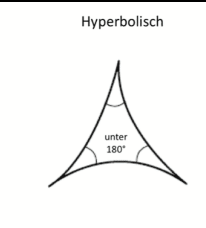
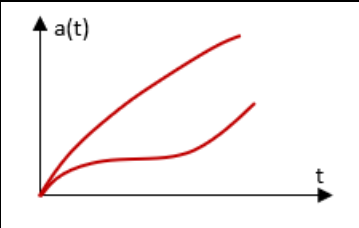
- Das Teilchenhorizont begrenzt den Teil des Universums, von dem uns seit dem Urknall Informationen erreicht haben können (Licht, Gravitationswellen...). Wird aus dem Linienelement berechnet mit $ds = 0$:

$$cdt = adw \Rightarrow dw = \frac{cdt}{a} = \frac{cda}{a\dot{a}} = \frac{cda}{a^2H} \text{ und } H = \frac{\dot{a}}{a} = \pm H_0 E(a)$$

$$r_{particle}(t) = D_{com}(0, t) = \int dw = \frac{c}{H_0} \int_0^a \frac{da}{a^2 E(a)} \quad (\text{Mitbewegte Entfernung})$$

- Heute mit $\Omega_{m,0} = 0,3$; $\Omega_{\lambda,0} = 0,7 \Rightarrow r_p = \frac{c}{H_0} \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{0,3a+0,7a^4}} \approx \mathbf{46,6 \text{ Mrd. Lj}}$ (Radius)
 \swarrow
 $\approx 14 \text{ Mrd. Lj}$ (Hubble Radius) $\underbrace{\hspace{10em}}_{\approx 3,3}$ (Numerisch)

Topologie

Krümmung	Zeitliche Entwicklung: Offen/Geschlossen*	Topologie (3D)**
<p>Elliptisch</p>  <p>$K=+1$</p>	 <p>Offen, Geschlossen</p>	<p>Endlich (Hypersphäre – Elliptisch + ...)</p>
<p>Euklidisch</p>  <p>$K=0$</p>	 <p>Offen</p>	<p>Endlich (10 Formen) Unendlich (8 Formen)</p>
<p>Hyperbolisch</p>  <p>$K=-1$</p>	 <p>Offen</p>	<p>Endlich Enendlich</p>

* Kontraktion = geschlossen, ständiger Expansion = Offen

** Form des Universums: Volume kann Endlich oder Unendlich sein

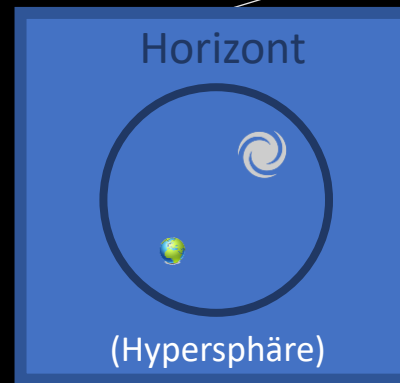
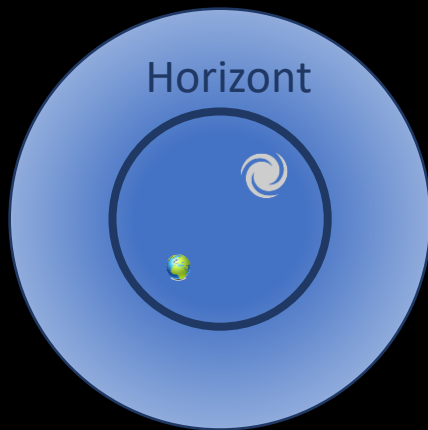
Wie groß ist das reale Universum ?

Universum (Teilchen Horizont = 46,6 Mrd Jahre)

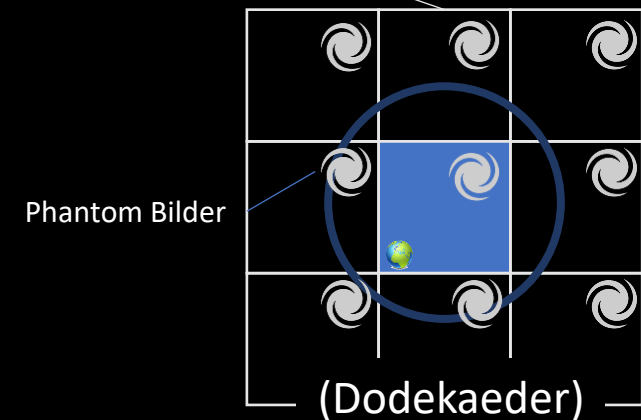
Undendlich

Endlich

(Ohne Rand)



Universum ist größer
als beobachtbares Universum



Universum ist kleiner
als beobachtbares Universum

Kosmologische Rotverschiebung

Kosmologische Rotverschiebung und Kosmische Ausdehnung

- Betrachten wir das Licht einer mitbewegten Quelle zur Zeit t_e ausgesandt und einen mitbewegten Beobachter bei $w=0$ zu einer Zeit t_o erreicht.
- Für Licht gilt $ds=0$, daraus wird die **Robertson-Walker Metrik**: $c dt = a(t) d\omega$
- Radiale Koordinatenentfernung zwischen Quelle und Beobachter ist konstant (Quelle und Beobachter sind mitbewegt)

$$\omega_{eo} = \int_{t_e}^{t_o} d\omega = \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)} = \frac{ct_o}{a(t_o)} - \frac{ct_e}{a(t_e)} = \text{const.} \quad \text{daher muss } \frac{d\omega_{eo}}{dt_e} = 0$$

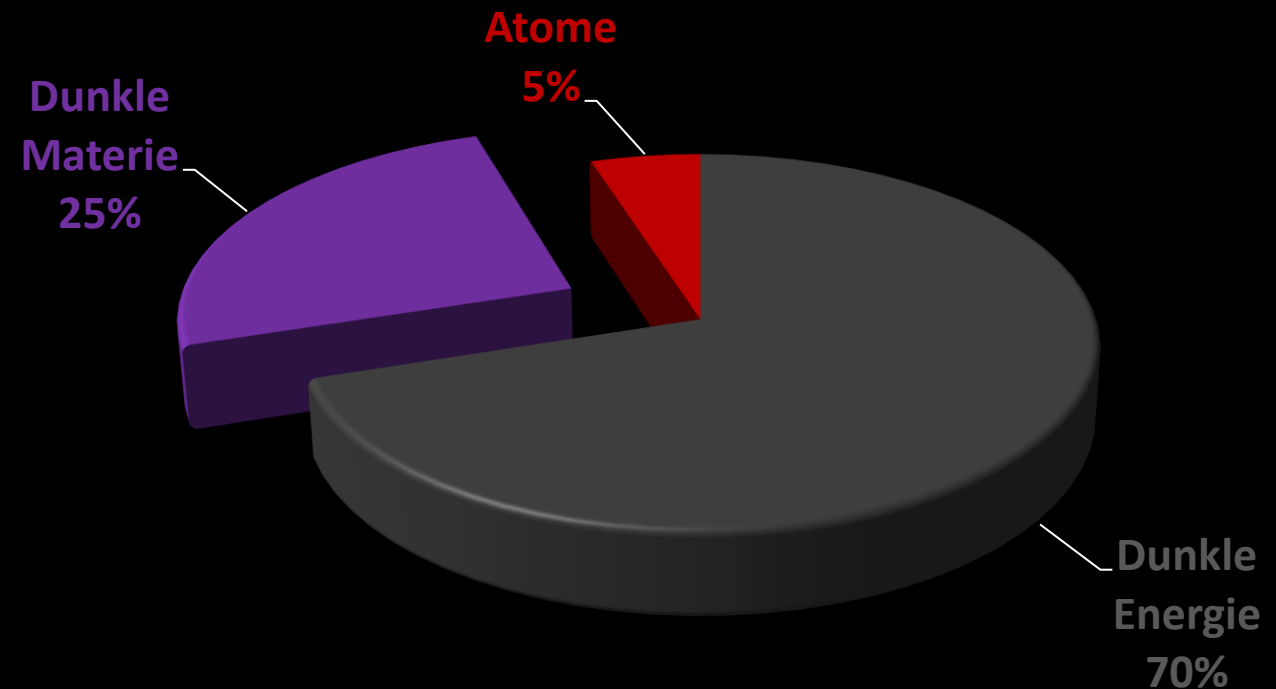
$$\frac{d}{dt_e} \left(\frac{ct_o}{a(t_o)} - \frac{ct_e}{a(t_e)} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dt_o}{dt_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}$$

- dt kann durch $dt = \nu^{-1}$ auf die Periodendauer der Lichtwelle mit Frequenz ν festgelegt werden. Dann ist

$$\frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = 1 + \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = 1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}$$

Was ist die dunkle Materie?

- Materie ist **nicht sichtbar** aber wir sehen ihre Auswirkung
- Spielt eine wichtige Rolle bei der **Strukturbildung** im Universum
- Kandidaten **Nichtbaryonische Materie:**
 - Hot Dark Matter ($v \approx c$): Top-Down Szenario für Strukturentstehung (zuerst Galaxienhaufen, dann Galaxien, Sternen...)
 - Cold Dark Matter ($v \ll c$): WIMPS, lassen sich mit der hierarchischen Entstehung vereinbaren (Bottom-Up Szenario)
 - Axionen: hypothetische Elementarteilchen



Bremsfunktion

- Bremsfunktion Funktion: beschreibt die Beschleunigung der kosmischen Expansion

Bremsfunktion
$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$

- wenn $q_0 < 0 \Rightarrow \ddot{a} > 0$ (Beschleunigung)
 $\Rightarrow \Omega_{\lambda,0} > \frac{1}{2}\Omega_{m,0}$ ($\Omega_{r,0} \approx 0$)
- $\Omega_{m,0} = 0,3; \Omega_{\lambda,0} = 0,7 \Rightarrow q_0 = -0,55$

Ausdehnungsrate des Universums heute nimmt

zu wenn $q_0 < 0 \Rightarrow \Omega_{\lambda,0} > \frac{1}{2}\Omega_{m,0}$

2. Friedmann Gleichung

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_r + \rho_m + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{\lambda c^2}{3}$$

$$-q = -\frac{4\pi G}{3H^2} (2\rho_r + \rho_m) + \frac{\lambda c^2}{3H^2}$$

$$q = \frac{4\pi G}{3H^2} \rho_{cr} (2\Omega_r + \Omega_m) - \Omega_\lambda$$

$$\times \frac{a^2}{\dot{a}^2} = \frac{1}{H^2}$$

$$\rho = (\rho_r + \rho_m)$$

$$P = \frac{1}{3}\rho_r c^2; P = 0 \text{ (Materie)}$$

$$\rho_r = \Omega_r \rho_{cr} \text{ und } \rho_m = \Omega_m \rho_{cr}$$

$$\Omega_\lambda = \frac{\lambda c^2}{3H^2} \quad \rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

$$q = \frac{1}{2}\Omega_m + \Omega_r - \Omega_\lambda$$