

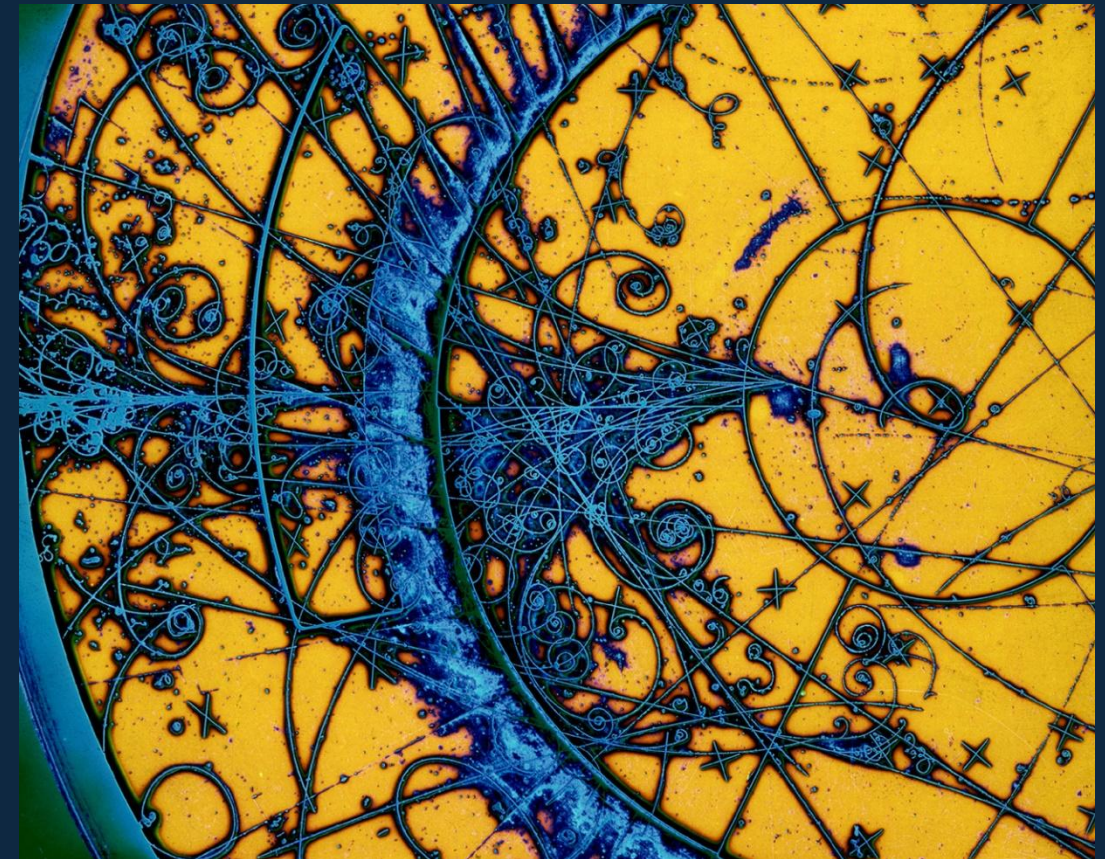


Das Frühe Universum

Vom Urknall bis zur kosmischen
Hintergrundstrahlung

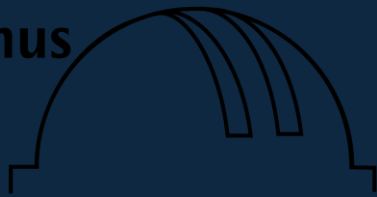
Emmanuel Blum

Juni 2025



Credit: CERN

Regiomontanus
Sternwarte
Nürnberg



Inhalt

- Friedmann-Lemaître Gleichungen
 - Kosmologische Parameter
 - Kosmologische Modelle
- Urknall Theorie
- Thermische Entwicklung
 - Primordiale Nukleosynthese
- Kosmische Hintergrundstrahlung CMB
- Inflation
- Primordiale Singularität

Friedmann-Lemaître Gleichungen

$$\begin{aligned}
 &= \Gamma_{kj,0}^0 + \Gamma_{kj,n}^n - \Gamma_{kj,0}^n - \Gamma_{kj,n}^0 - \Gamma_{kj,0}^n - \Gamma_{kj,n}^0 \\
 &= \Gamma_{kj,0}^0 + \Gamma_{kj,n}^n - \Gamma_{kj,0}^n - \Gamma_{kj,n}^0 - \Gamma_{kj,0}^n - \Gamma_{kj,n}^0 \\
 &= \frac{g_{kj}}{c^2} \frac{da}{dt} + \Gamma_{kj,n}^n - \frac{a\ddot{a}}{c^2} g_{kj} - \frac{a\dot{a}}{c^2} g_{kj} \\
 &= \Gamma_{kj,n}^n - \Gamma_{kj,0}^n - \Gamma_{kj,n}^0 - \Gamma_{kj,0}^n - \Gamma_{kj,n}^0 \\
 &+ \frac{g_{kj}}{c^2} (\dot{a}\dot{a} - \ddot{a}a - \dot{a}\dot{a} + \dot{a}\dot{a})
 \end{aligned}$$

Credit: Jörn Loviscach

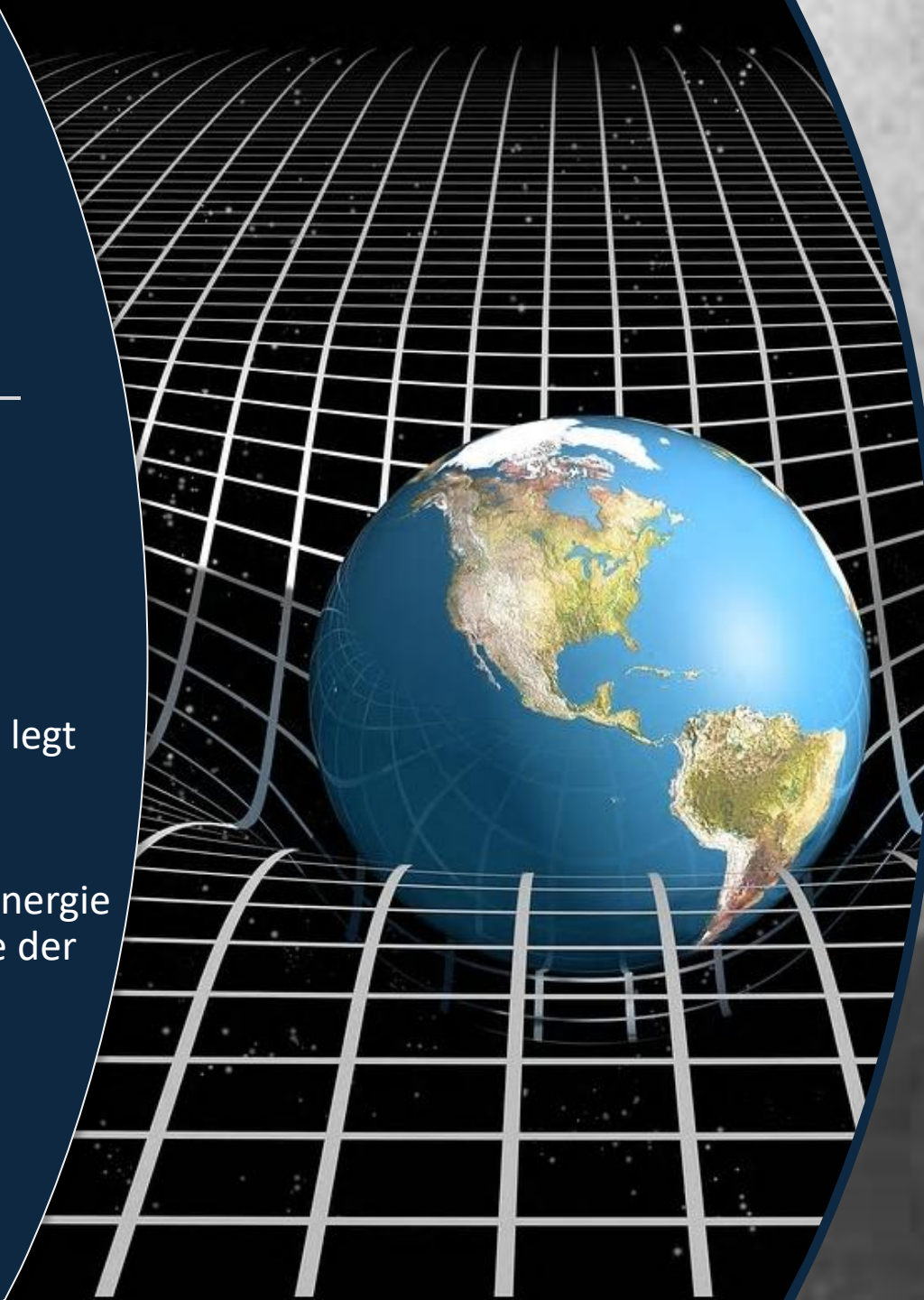
1915

Einstein's ART

- **Feldgleichung:**

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

- Die Struktur der Raumzeit legt fest wie sich Materie und Energie bewegt.
- Umgekehrt Materie und Energie bestimmen die Geometrie der Raumzeit Struktur.



Geometrie des Raums

- Wie kann ich die Geometrie eines Raums beschreiben?
- Robertson-Walker Metrik beschreibt ein homogenes und isotropes Universum (mit Expansion)

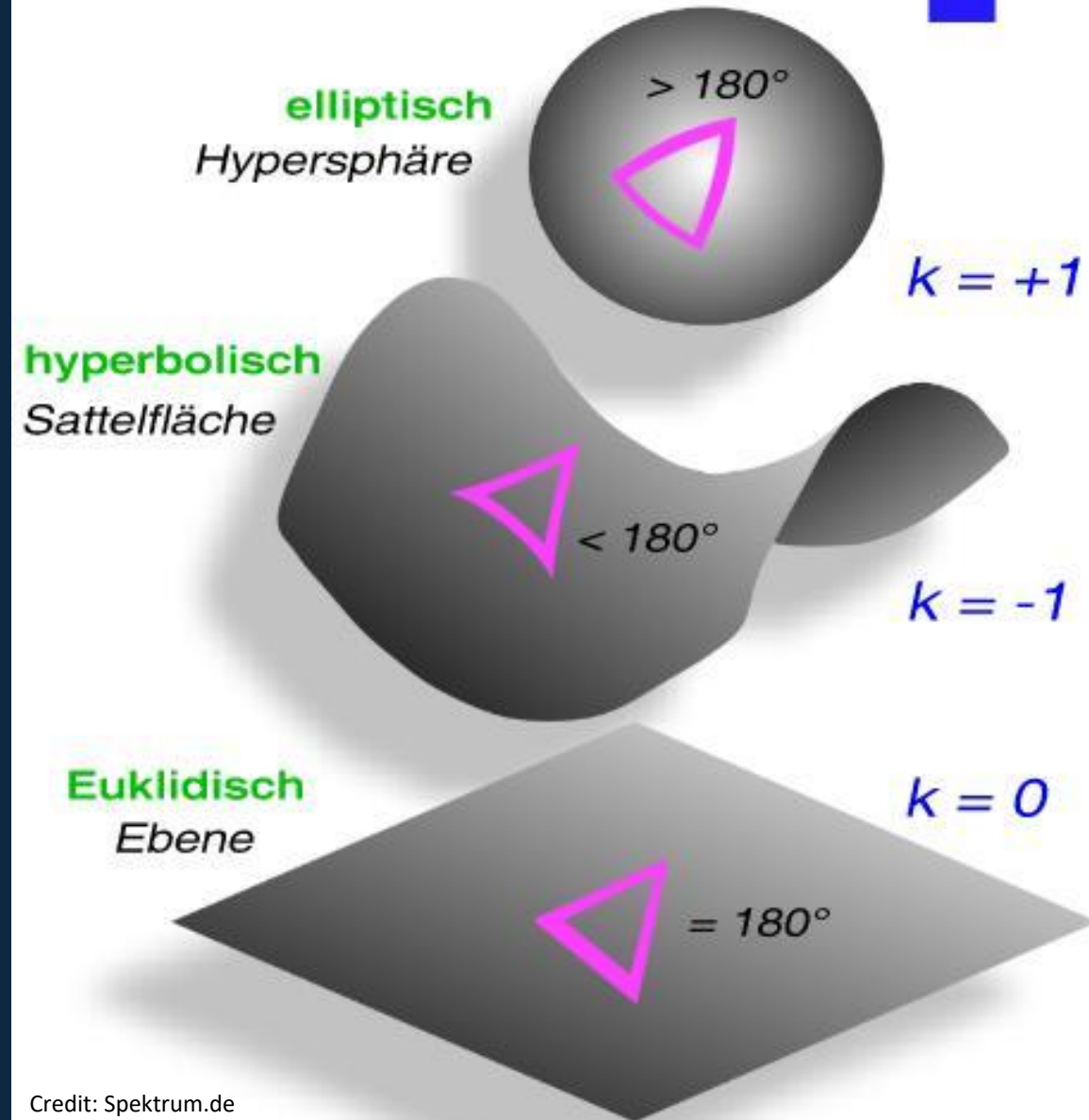
$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \right)$$

a ist der Skalenfaktor

- Der Krümmungsparameter K entscheidet über die Geometrie des Universums

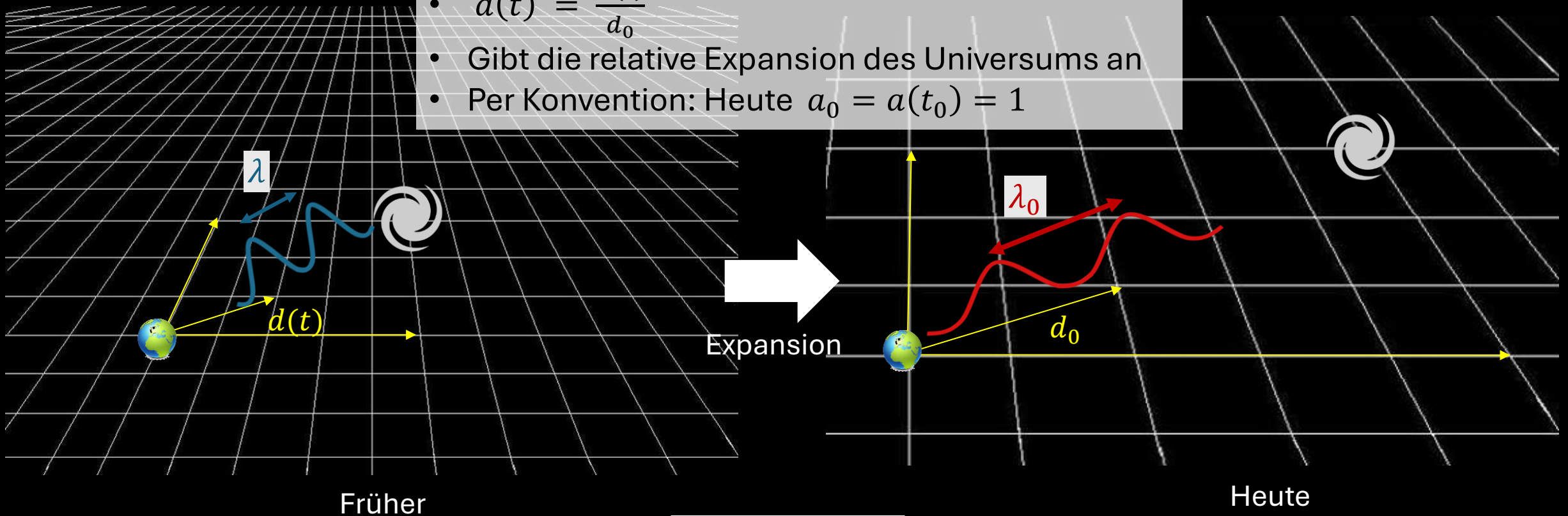
Geometrien des Universums

mit einfacher Topologie



Skalenfaktor $a(t)$ und Rotverschiebung

- $a(t) = \frac{d(t)}{d_0}$
- Gibt die relative Expansion des Universums an
- Per Konvention: Heute $a_0 = a(t_0) = 1$



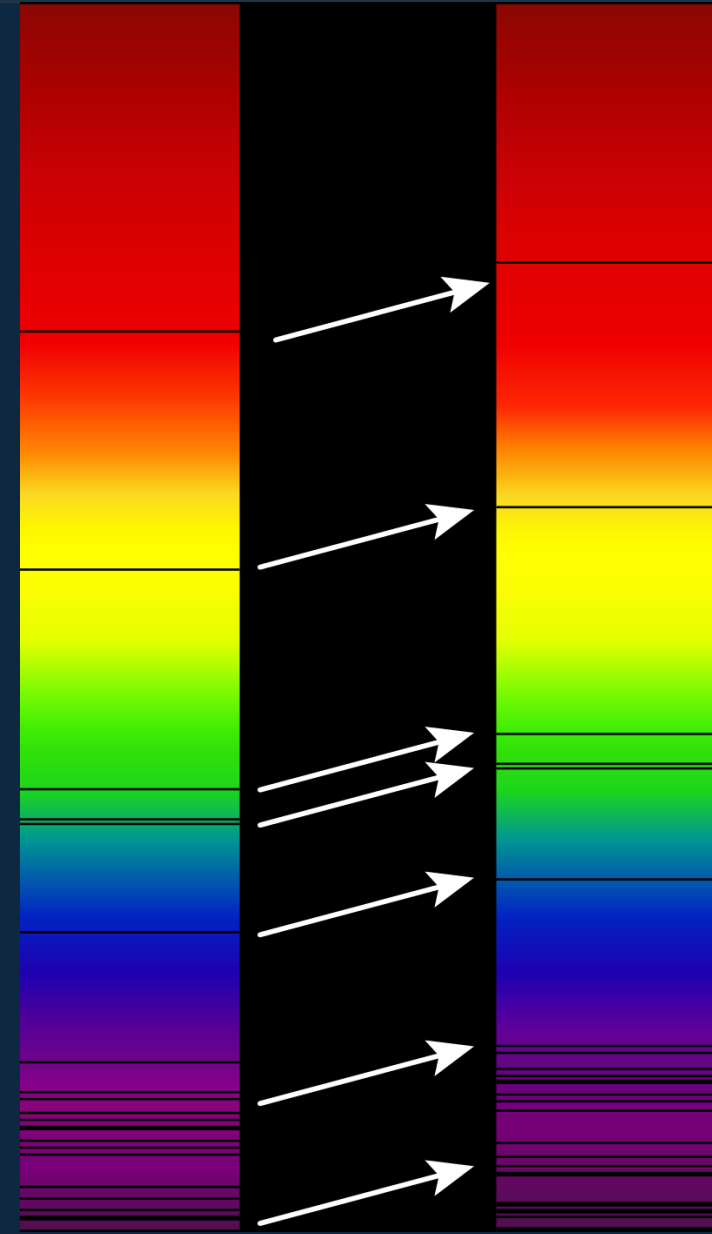
$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda}$$

Kosmologische Rotverschiebung

- Die Expansion des Universums (oder die Kontraktion) führt zu einer **Rotverschiebung** (oder Blau) der Photonen die sich durch den Raum bewegen
- Aus der Robertson-Walker Metrik:

$$a = \frac{1}{1 + z}$$

Beispiele	z	a
Heute	0	1
Quasare	bis 10	~0,1
Rekombination	1100	10^{-3}

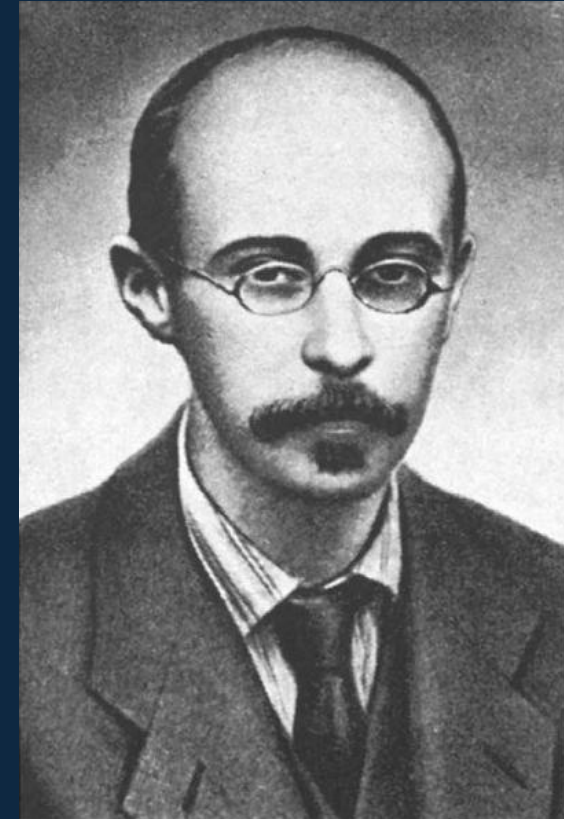


Friedmann Gleichungen (1922-1924)

- Unter der Annahme dass das Universum **isotrop** und **homogen** ist, schrumpft die Feldgleichung auf 2 gewöhnlichen Differentialgleichungen für den Skalenfaktor:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\lambda c^2}{3}$$
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\lambda c^2}{3}$$

- $a(t)$ Skalenfaktor
- G Gravitationskonstante
- c Lichtgeschwindigkeit
- $\rho = \rho(t)$ Materie Dichte
- $P = P(t)$ Druck
- K Krümmungsindex(-1,0,+1)
- λ Kosmologische Konstante



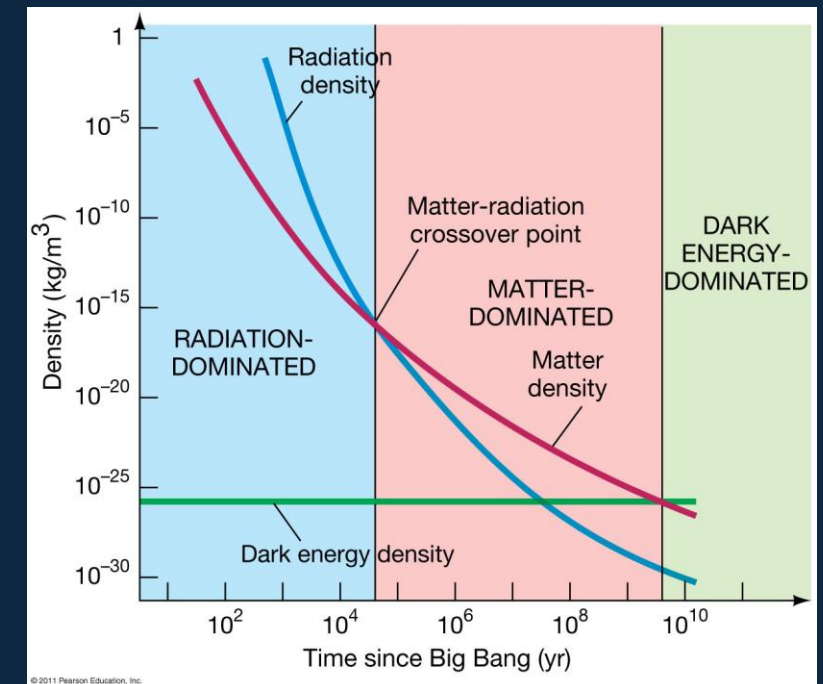
Alexander Alexandrowitsch
Friedmann
Russischer Mathematiker

1888-1925

Arten von Materien

- In Kosmologie gibt es 2 Arten von Materien: **Staub** (nicht relativistisch) und **Strahlung** (relativistisch)
- Druck $P(\rho)$ wird aus der Zustandsgleichung des idealen Gases berechnet
- Dichte $\rho(a)$ wird mit dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik abgeleitet

	Dichte	Druck P
Relativistische Materie „Strahlung“: Photonen, Neutrinos	$\rho_r = \rho_{r,0} a^{-4}$	$P = 1/3 \rho c^2$
Nicht relativistische Materie „Staub“: Baryonen + Dunkle Materie	$\rho_m = \rho_{m,0} a^{-3}$	0
„Andere Materien Art“ (Dunkle Energie)	$\rho = \text{Konstant}$	$P = -\rho c^2$



Ersten Hauptsatz Thermodynamik

- Energiehaltung in Abwesenheit von Wärmeströme (adiabatisch) schreibt sich $dU = -PdV$ (U interne Energie, P Druck, V Volumen)

$$dU + PdV = 0 \Rightarrow d(\rho c^2 a^3) + Pd(a^3) = 0$$

verallgemeinernd $P = w\rho c^2$ (mit w konst.)

$$\Rightarrow \dot{\rho} a^3 + 3\rho a^2 \dot{a} + 3w\rho a^2 \dot{a} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(w+1) \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(w+1) \int \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\Rightarrow \ln(\rho) = -3(w+1) \ln(a) + \text{Konst.}$$

$$\Rightarrow \rho = \text{Konst.} \times e^{\ln(a)^{-3(w+1)}}$$

Allgemeiner Ausdruck für Dichte und Druck

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 a^{-3(w+1)} \text{ und } P = w\rho c^2$$

w	P	ρ
0	0 (Staub)	$\rho_0 a^{-3}$
1/3	> 0 (Strahlung)	$\rho_0 a^{-4}$
-1	< 0 (Dunkle Energie)	ρ_0 (Konstant)



Vertiefung „Zustandsgleichung“

Kosmologische Parameter Definition

- **Hubble Funktion:** ist die Expansionsrate des Universums:

Hubble Funktion

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{da}{adt}$$

- Heutige Hubble Konstante $H_0 = H(t_0)$

- $H_0 \approx 70 \frac{km}{s.Mpc} [s^{-1}]$

- Umkehrwert der Hubble Konstant ist die Hubble Zeit:

- $t_H = \frac{1}{H_0} = 14 \text{ Mrd Jahre}$

- Hubble Radius:

- $R_H = \frac{c}{H_0} \approx 14 \text{ Mrd Lj}$

- **Kritische Dichte ρ_{cr} :** Entspricht die Dichte, bei der gerade das Universum flach ist.

Kritische Dichte

$$\rho_{cr}(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

Heutiger Wert $\rho_{cr,0} = 9.20 \cdot 10^{-30} \text{ g.cm}^{-3}$ (eine Galaxienmasse pro Mpc^3 oder 1 Atom pro m^3)

- Mit $\lambda = 0$, $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{Kc^2}{a^2} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_{cr}} - 1 = \frac{Kc^2}{a^2 H^2}$

$\rho > \rho_{cr}$	$K = +1$ (Sphärisch)
$\rho = \rho_{cr}$	$K = 0$ (Flach)
$\rho < \rho_{cr}$	$K = -1$ (Hyperbolisch)

Relative Dichte Parameter Definition

1. Relative Dichte Parameter:

Es ist bequem und nützlich, für die Dichtebeiträge Dimensionslose Parameter einzuführen und Expansionsrate des Universums auf den heutigen Wert zu beziehen. (Parameter mit Index 0)

Strahlung Dichte

$$\Omega_r(t) = \frac{\rho_r(t)}{\rho_{cr}(t)}$$

Materie Dichte

$$\Omega_m(t) = \frac{\rho_m(t)}{\rho_{cr}(t)}$$

Kosm. Konstante

$$\Omega_\lambda(t) = \frac{\lambda c^2}{3H^2(t)}$$

Rel. Krümmung

$$\Omega_k(t) = -\frac{Kc^2}{H^2(t)}$$

2. Umformen Erste Friedmann Gleichung

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\lambda c^2}{3}$$

\downarrow
 H^2

\downarrow
 $\rho_r + \rho_m$

$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{r,0} \\ \Omega_{m,0} \\ \Omega_{k0} \\ \Omega_{\lambda,0} \end{array} \right.$

Vertiefung „1. Friedmann Gleichung“

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} - \frac{\Omega_{K,0}}{a^2} + \Omega_{\lambda,0} \right)$$

Expansion Funktion $E^2(a)$

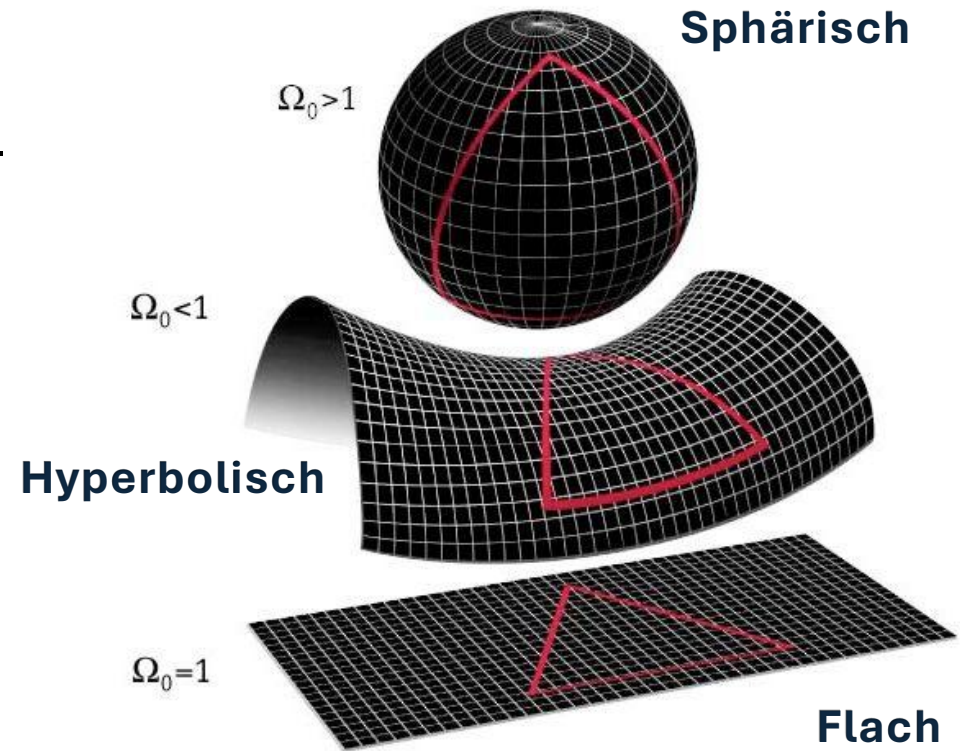
Gleichung auf heute ($a = 1$): $\Omega_{K,0} = 1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0} - \Omega_{\lambda,0}$

Flaches Universum: $\Omega = 1$

Heutige Parameter

$$\Omega_0 = \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\lambda,0} = 1 + \frac{Kc^2}{H_0^2}$$

- Messungen aus dem CMB beweisen dass $\Omega_0 = 1$ sein muss => Universum ist flach
- **Flachheitsproblem:** Warum ist das Universum flach? (**Kosmologische Inflation** ist die am meisten akzeptierte Lösung)

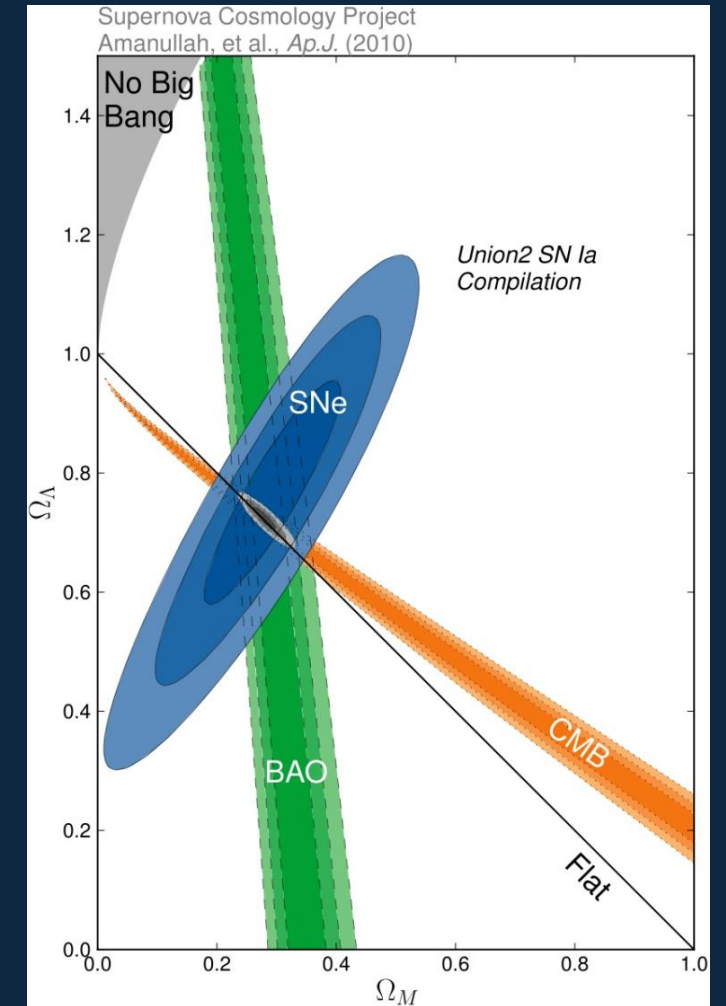
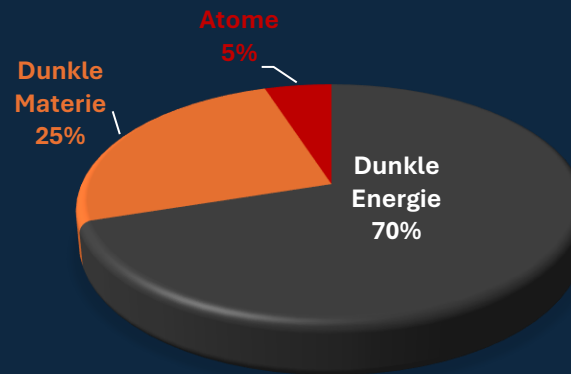


Parameter Bestimmung

Parameter Bestimmung durch:

- CMB (Hintergrundstrahlung)
- BAO (Großräumige Strukturen)
- Supernovae Typ Ia
- Gravitationslinseneffekt

Größe	Symbol	Wert
Hubble-Konstante	H_0	$70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Materiedichte	$\Omega_{m,0}$	0,3
Strahlungsdichte	$\Omega_{r,0}$	$8,5 \cdot 10^{-5} \approx 0$
Kosmologische Konstante	$\Omega_{\lambda,0}$	0,7



Entwicklung Dichteparameter

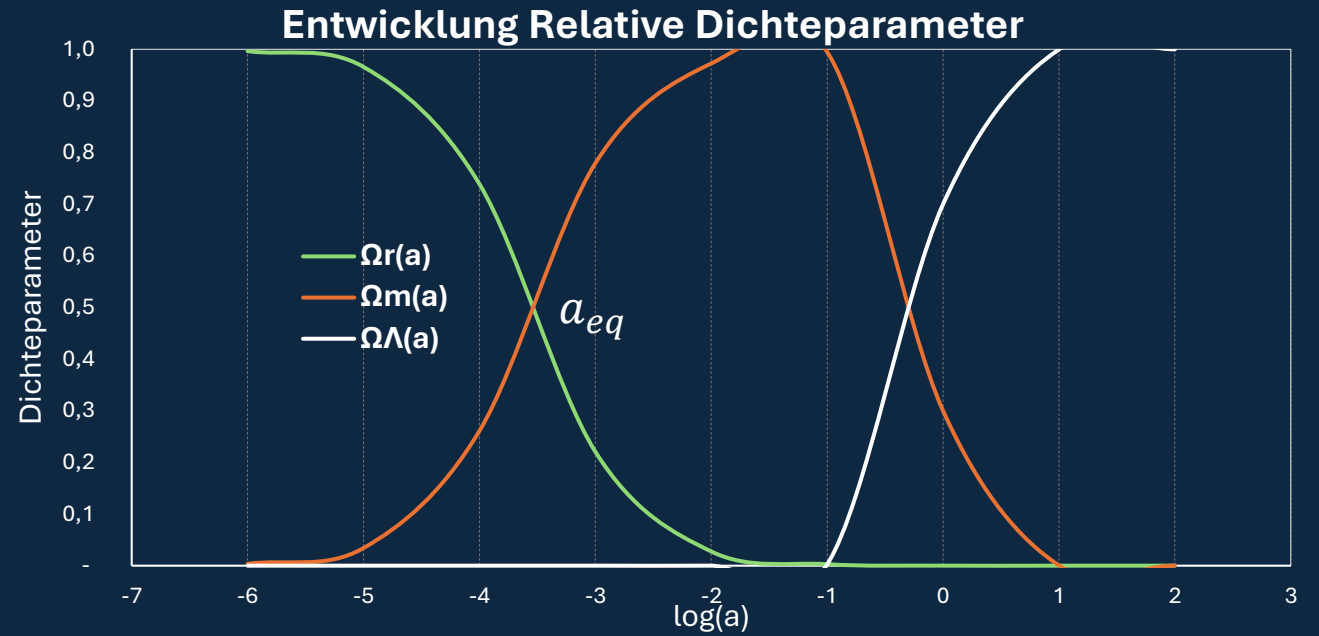
Die zeitliche Entwicklung der Dichteparameter ergibt sich aus:

$$\Omega_r = \frac{\Omega_{r,0} \cdot a^{-4}}{E(a)^2}; \quad \Omega_m = \frac{\Omega_{m0} \cdot a^{-3}}{E(a)^2}; \quad \Omega_\lambda = \frac{\Omega_{\lambda,0}}{E(a)^2}$$

- Im sehr frühen Universum ist die Strahlungsdichte dominant
- Bei $a_{eq} \approx 2,8 \cdot 10^{-4}$ ($Z \approx 3528$) sind relative Strahlung und Materie Dichte gleich
- Bemerkung: a_{eq} ist noch weit vor der Rekombination ($Z \approx 1100$)
- Heute dominiert der Dichteparameter der kosmologischen Konstante



Vertiefung „Ab Wann Materie Ära?“



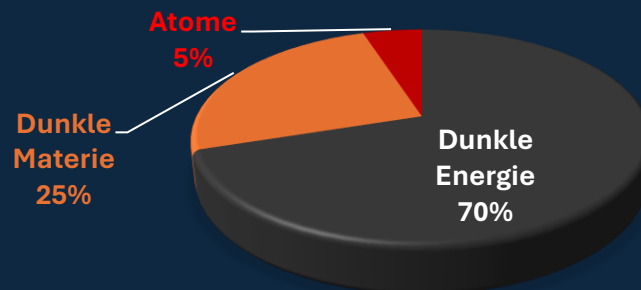
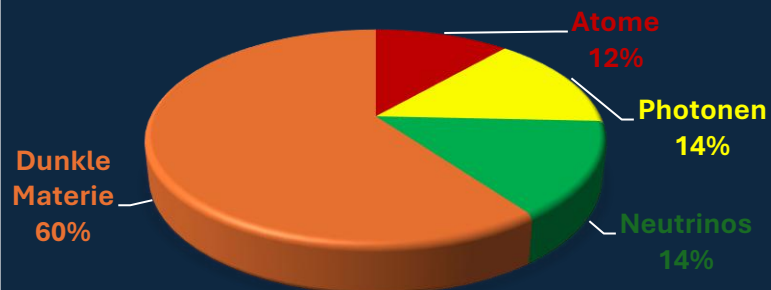
380.000 Jahre



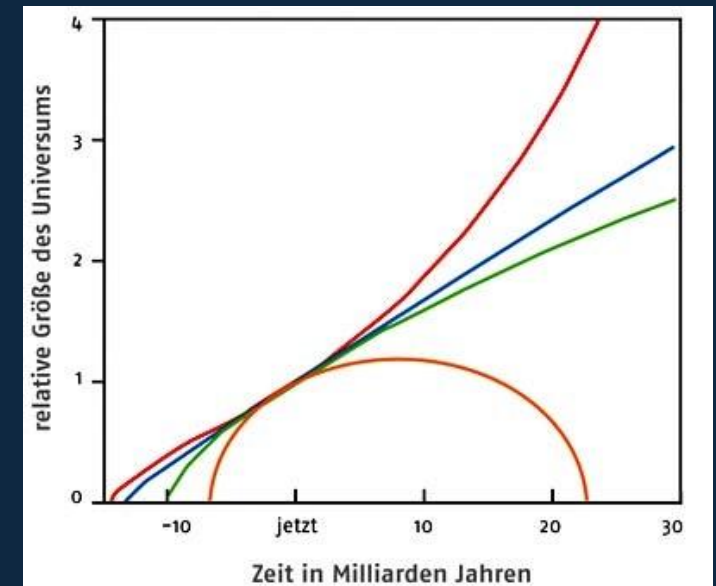
Heute



Zukunft



Kosmologische Modelle



Credit: scinexx.de

Kosmologische Modelle

- Welche Lösungen für die Friedmann-Gleichungen ?
- Integral ist analytisch nicht lösbar aber es lohnt sich speziellen Fälle zu betrachten

$$H = \pm H_0 E(a)$$

$$\Rightarrow \frac{da}{adt} = \pm H_0 E(a)$$

$$\Rightarrow \frac{da}{H_0 a E(a)} = \pm dt$$

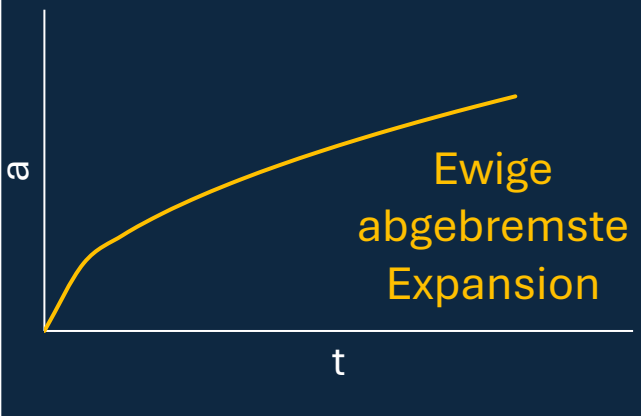
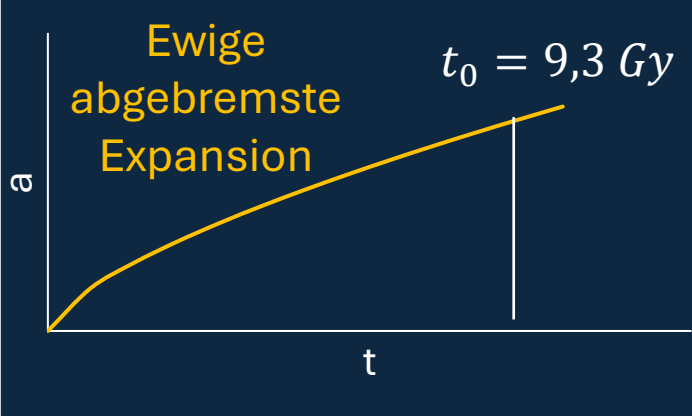
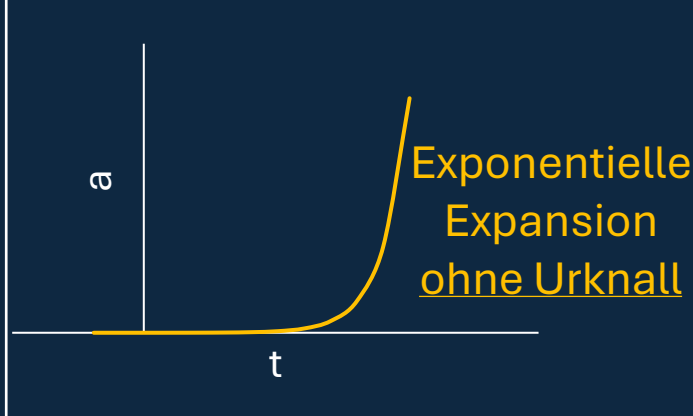
$$\Rightarrow t = \pm \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da}{a E(a)}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da}{a(\Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\lambda,0} - \frac{Kc^2}{H_0^2}a^{-2})^{1/2}}$$

Vielzahl von Modellen je nach heutigen Parameter Werte

- Aufgabe der Kosmologie ist es, kosmologische Parameter zu bestimmen und daraus Weltmodelle abzuleiten.
- Wir suchen nach einem Ausdruck für den Skalenfaktor $a(t)$

Kosmologische Modelle mit $k = 0$

	Strahlungsdominierte Ära (Frühes Universum)	Materiedominierte Ära (Einstein - de Sitter)	Spätes Universum (De Sitter)
Parameters	$\Omega_{r,0} = 1$ ($\Omega_{m,0} = \Omega_{\lambda,0} = 0$)	$\Omega_{m,0} = 1$ ($\Omega_{r,0} = \Omega_{\lambda,0} = 0$)	$\Omega_{\lambda,0} = 1$ ($\Omega_{m,0} = \Omega_{r,0} = 0$)
$E(a)$	$E(a) = \sqrt{\Omega_{r,0} a^{-4}}$	$E(a) = \sqrt{\Omega_{m,0} a^{-3/2}}$	$E(a) = \sqrt{\Omega_{\lambda,0}} = 1$
Lösung	$\Rightarrow t = \frac{a^2}{2H_0} \Rightarrow a(t) \sim t^{1/2}$	$\Rightarrow t = \frac{2a^{3/2}}{3H_0} \Rightarrow a(t) \sim t^{2/3}$	$\Rightarrow t = \frac{\ln(a)}{H_0} \Rightarrow a(t) = e^{H_0 t}$
$a(t)$	 <p>Ewige abgebremste Expansion</p>	 <p>Ewige abgebremste Expansion $t_0 = 9,3 \text{ Gy}$</p>	 <p>Exponentielle Expansion ohne Urknall</p>

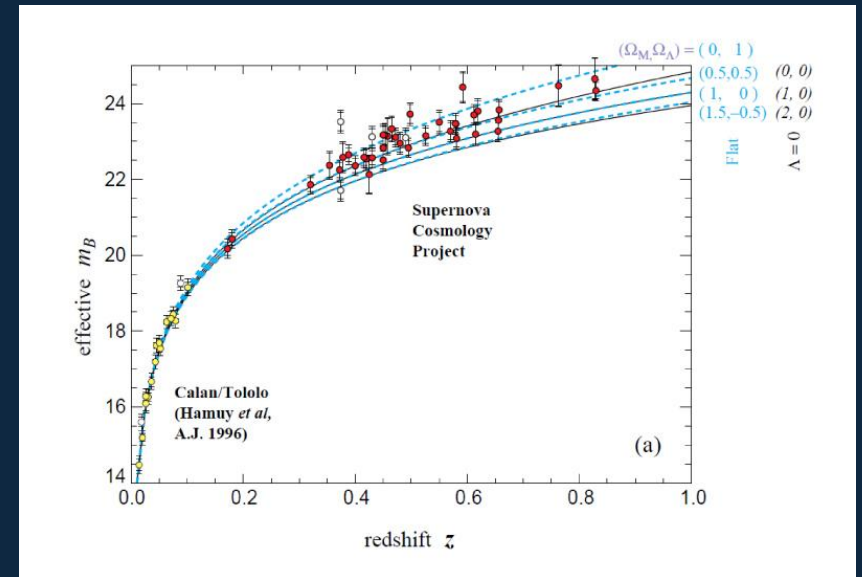
1998 Expansion Beschleunigt

- 2 unabhängige Projekte Supernova Cosmology Project & High-Z Supernovae Search Team entdecken die Beschleunigung der Kosmischen Expansion
- Methodik: Messung der Abhängigkeit Entfernung zu Rotverschiebung $d(z)$ von Supernovae Typ Ia.
Stichprobegröße: 42 Supernovae mit $0.18 < Z < 0,83$
- Daraus resultierte eine relative Materiedichte von $\Omega_{m,0} = 0,28$ und das Modell mit $\lambda = 0$ muss verworfen werden.

=> **Comeback der Kosmologischen Konstante λ**

- 2011 Nobelpreis: S Perlmutter, A Riess, B.P Schmidt

Supernova Cosmology Project



<https://iopscience.iop.org/article/10.1086/307221/meta>

$$\Omega_m = 0,28 \pm 0,09 \text{ und } \lambda > 0$$

Einstein - De Sitter Modell wird verworfen !

Physikalische Bedeutung der Kosm. Konstante λ

$$\lambda = Cte$$

- als Konstante Energie Dichten interpretieren $\Rightarrow \ddot{a} > 0$ (*Beschleunigung*)
weil $P = -\rho_\lambda c^2 < -\frac{1}{3}\rho c^2$ (2. Friedmann Gleichung)
- Exponentielle Expansion



Schlussfolgerung:

- Negativer Druck wirkt als Gegenkraft zur Gravitation und λ ist somit eine “natürliche” Erklärung für die beschleunigten Expansion (Dunkle Energie)



Problem

- ρ_λ wird als Vakuumenergie Dichte interpretiert. Der beobachteter Wert ist um ein Faktor 10^{120} niedriger als in den theoretischen Berechnung der Quantenfeld Theorie

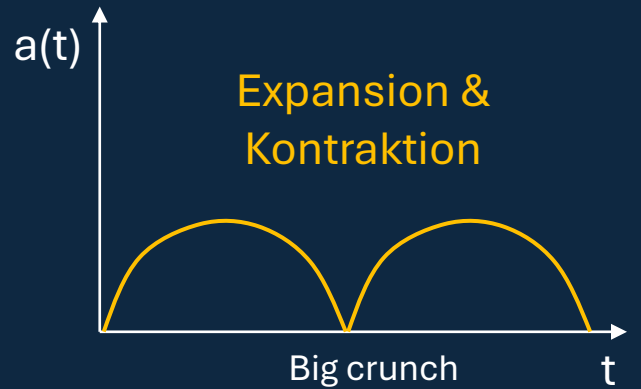
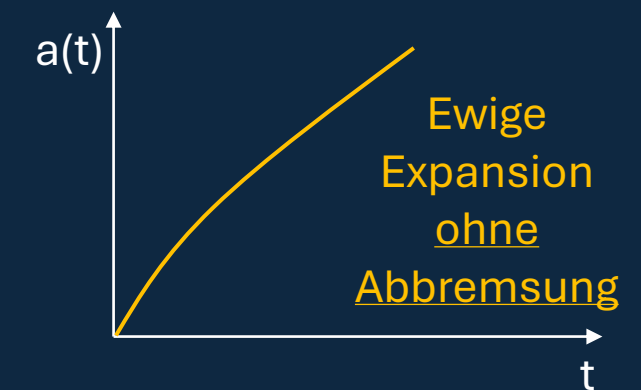
Euclid Weltraumteleskop



- Mission ESA: Untersuchung der Dunklen Materie und Energie
 - Start : Juli 2023
 - Sichtbaren Licht und nahe IR am L2 Punkt
 - Bis $Z = 2$ (ca 10 Mrd J)
 - 30% des Himmels werden abgescannt
 - 2 Messverfahren
 - Schwache Gravitationslinseneffekt (1,5 Mrd Galaxien)
 - Spektroskopie (35 Mio. Galaxien)
- Erste Ergebnisse erwartet in 2026 Q1

Ist λ Konstant ?

Kosmologische Modelle mit $k \neq 0$

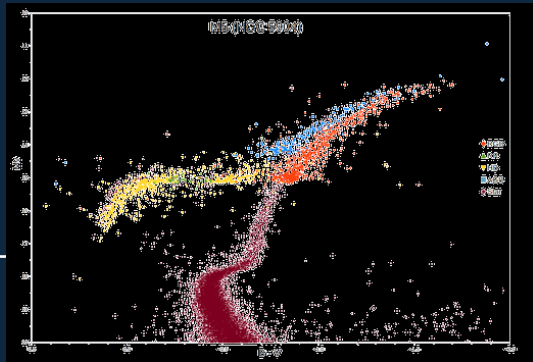
	Friedmann Universum (Hypersphäre)	Friedmann Universum (Hyperbolisch)
Parameters	$K = 1 \Rightarrow \Omega_{m,0} > 1$ ($\Omega_{r,0} = \Omega_{\lambda,0} = 0$)	$K = -1 \Rightarrow \Omega_{m,0} < 1$ ($\Omega_{r,0} = \Omega_{\lambda,0} = 0$)
$E(a)$	$E(a) = \sqrt{\Omega_{m,0}a^{-3} - (\Omega_{m,0} - 1)a^{-2}}$	$E(a) = \sqrt{\Omega_{m,0}a^{-3} + (1 - \Omega_{m,0})a^{-2}}$
Lösung	Substitution: $a = \frac{\beta}{2}(1 - \cos u)$, $\beta = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}-1}$ $t = \frac{\beta}{2} \frac{(u - \sin u)}{H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}-1}} \quad (1)$	Es lässt sich beweisen: $t \rightarrow \infty \Rightarrow a \propto t \quad (1)$
$a(t)$	 <p>Expansion & Kontraktion</p> <p>Big crunch</p>	 <p>Ewige Expansion ohne Abbremsung</p>

Kosmologische Modelle mit $\Omega_{m,0} + \Omega_{\lambda,0} = 1$

	$\Lambda - CDM$
Parameters	$\Omega_{m,0} + \Omega_{\lambda,0} = 1$ (und $K = 0$)
$E(a)$	$E(a) = \sqrt{\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\lambda,0}}$
Lösung	Mit Substitution: $u = a^{3/2}$ $t(a) = \frac{2}{3H_0\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \operatorname{arcsinh} \left[\sqrt{\frac{1-\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}}} a^{3/2} \right] \Rightarrow a(t) = \left[\sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{1-\Omega_{m,0}}} \sinh(3/2H_0\sqrt{1-\Omega_{m,0}}t) \right]^{2/3}$
$a(t)$	<p>Alter Universum mit $\Omega_{m,0} = 0.3$ $\Rightarrow t_0 = 13,4$ Mrd Jahre</p> <p>Abgebremste Ausdehnung</p> <p>Wendepunkt: vor 6 Mrd Jahre</p> <p>Beschleunigte Ausdehnung</p> <p>Mrd. Jahre</p>

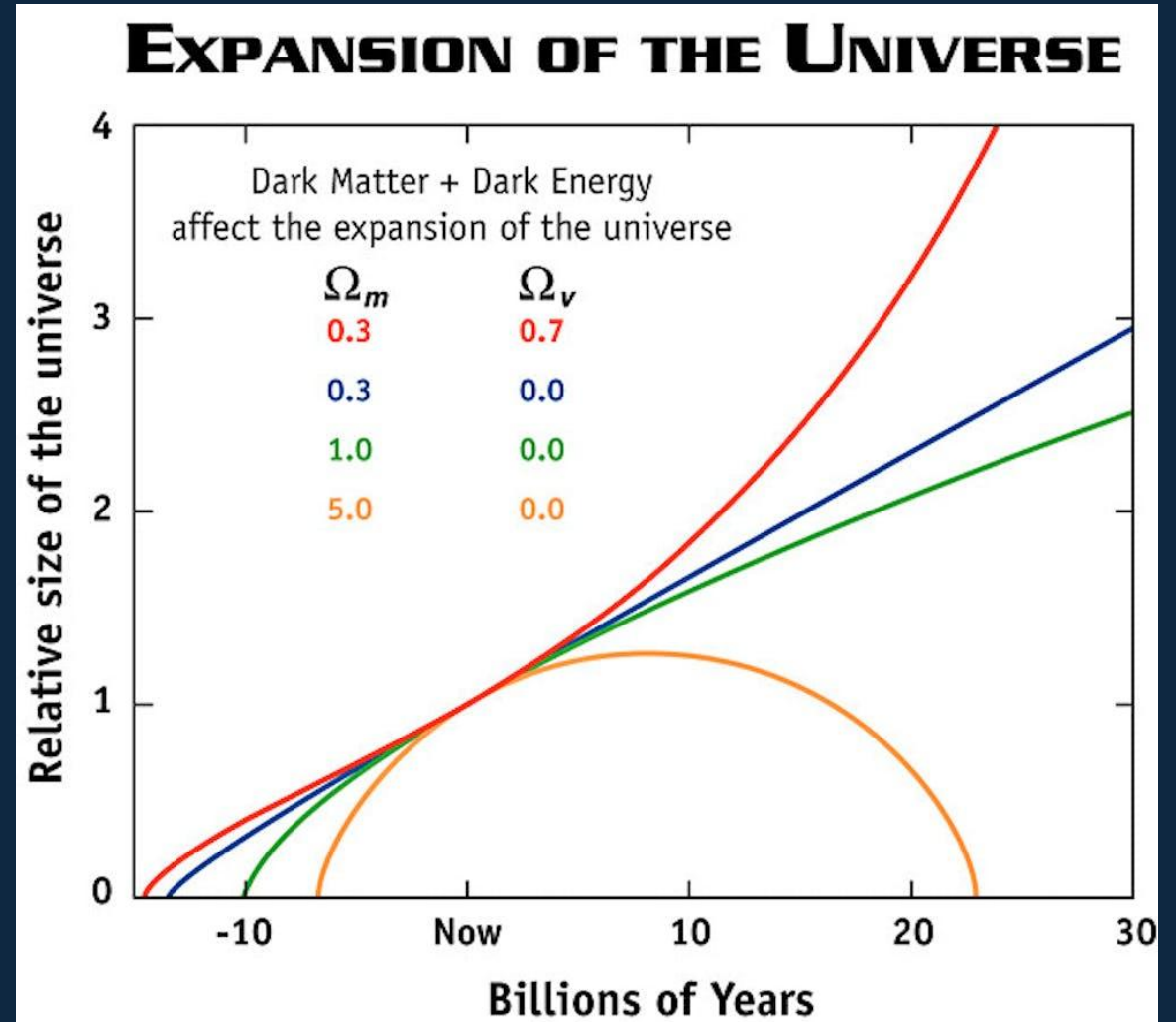
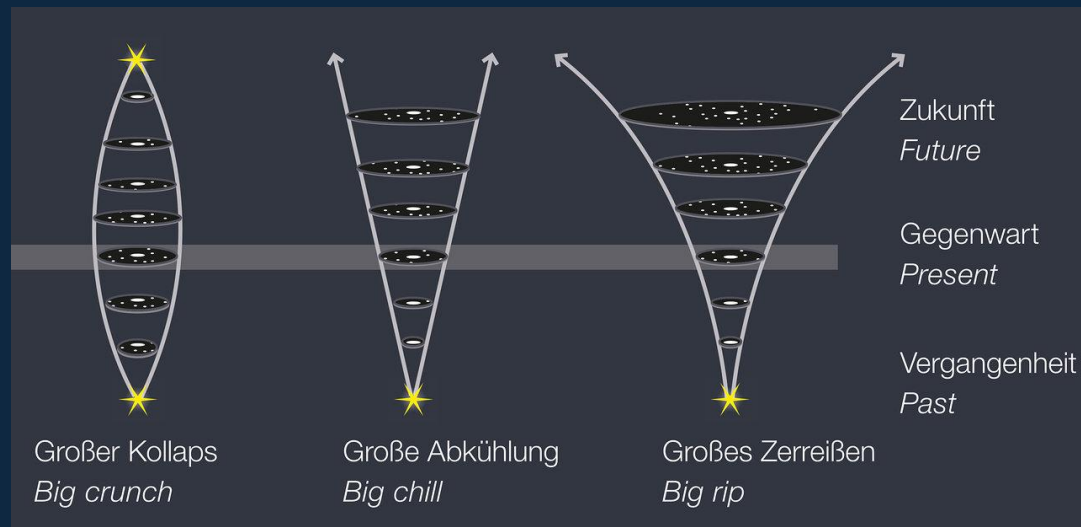
Alter Universum

- Theoretisches Alter muss mit den Beobachtungen (ältesten Objekte im Universum) übereinstimmen
- 3 Methoden:

	Nukleare Kosmochronologie	Alter Kugelsternhaufen	Alter Weiße Zwerge
	Häufigkeitbestimmung Radioaktive Isotope ^{235}U ^{238}U		Modellierung Abkühlung weißer Zwerg
Alter Objekte	$T_{\text{Erde}} \approx 4,6 \pm 1 \text{ Gyr}$ $T_{\text{Milchstr}} \approx 13 \text{ Gyr}$		$T_{\text{Zwerg}} \approx 9,5 \pm 1 \text{ Gyr}$
Alter Universum	$T_u \geq 13 \text{ Gyr}$	$T_u \geq 13 \text{ Gyr}$	$T_u \geq 12 \text{ Gyr}$

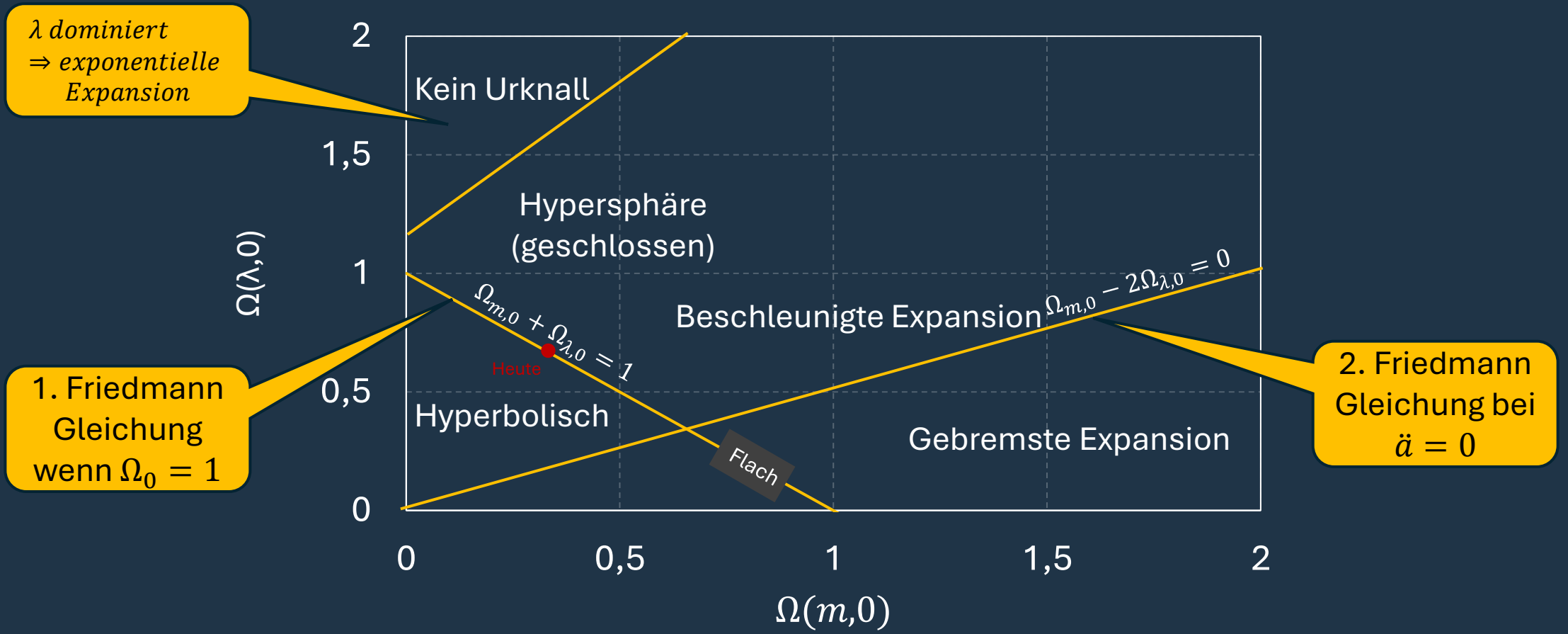
Fazit

- Zeitliche Evolution des Universums ist abhängig von den Dichteparametern und Krümmung
- Hubble Konstante bestimmt das Alter des Universums
- Die Form des Universums (endlich, unendlich) wurde in der ART nicht berücksichtigt (Topologie).

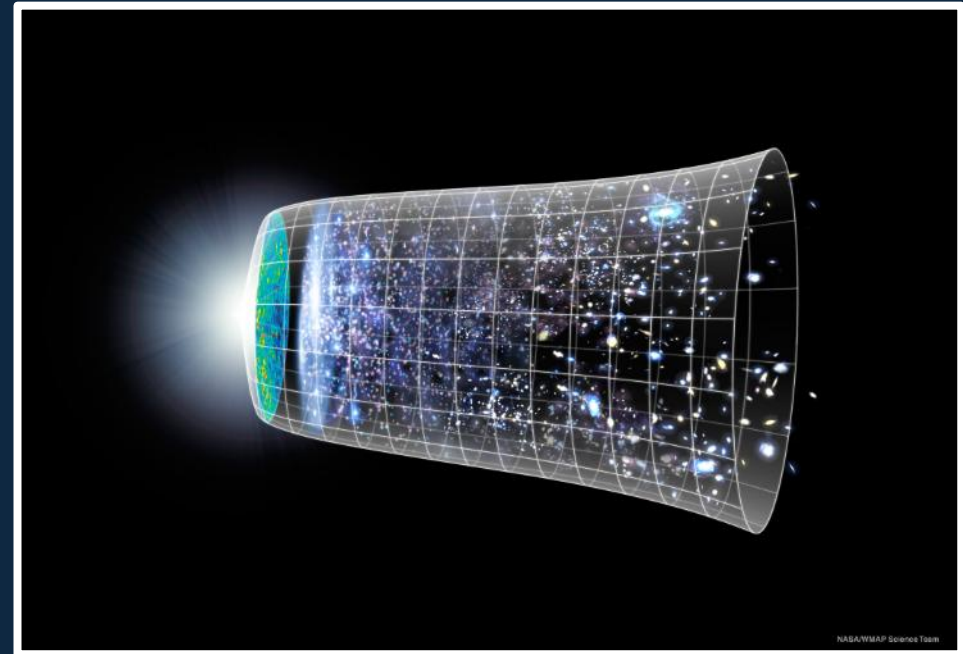


Credit: NASA

Parameter Diagramm

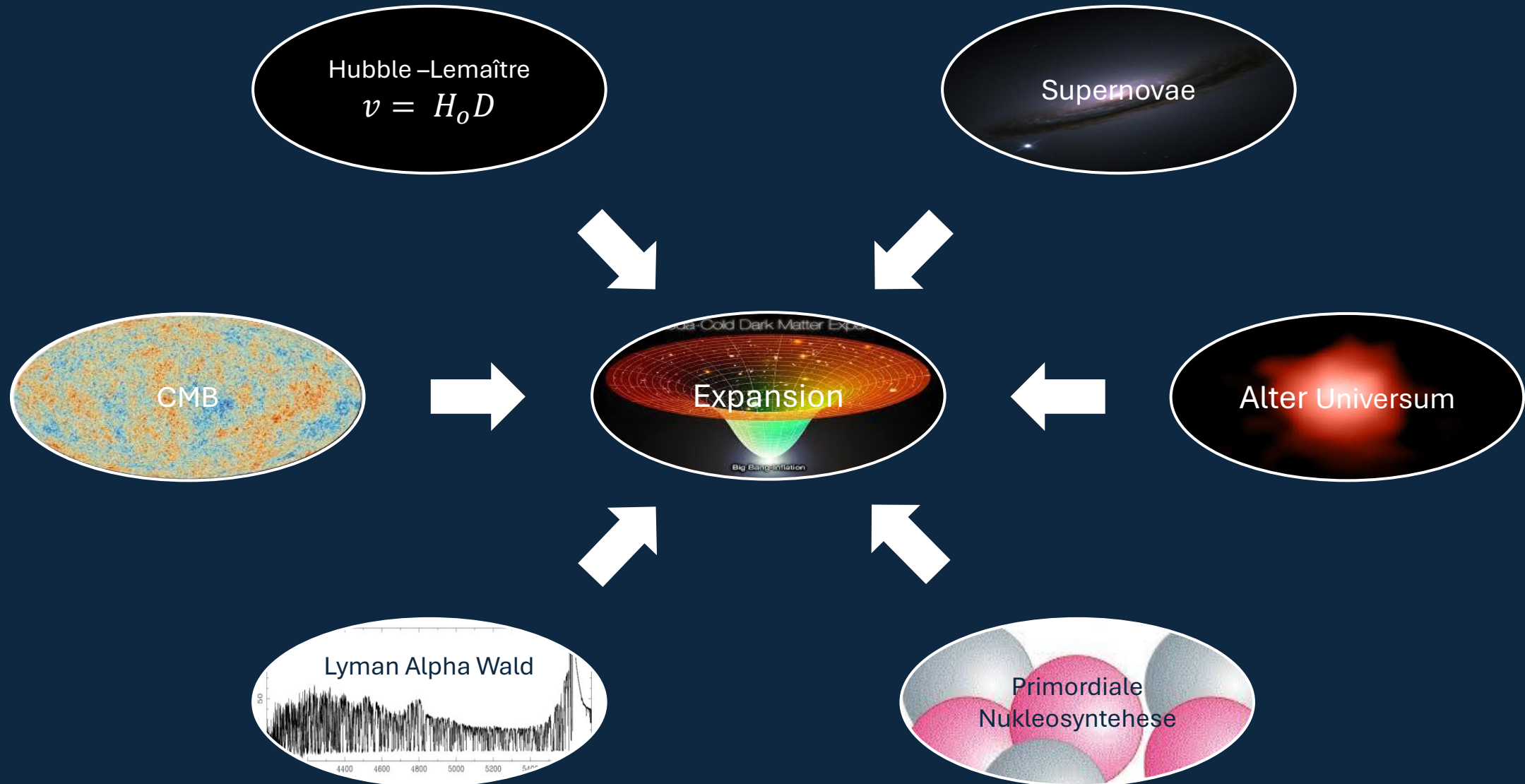


Urknall Theorie



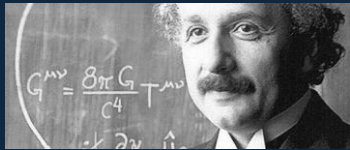
Credit: NASA

Bestätigungen durch Beobachtungen



Geschichte Urknall Theorie

- **1915**
A. Einstein
veröffentlicht ART



- **1925**
E. Hubble :
Entfernung Nebeln
extra galaktisch

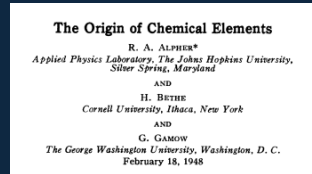


- **1927**
G. Lemaître beschreibt
die Expansion des
Universums



- **1940-48**
G Gamov: primordiale
Nukleosynthese,
postuliert CMB

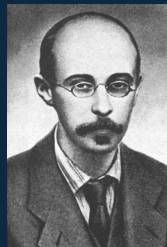
R Alpher, R Herman:
Voraussage Temp. CMB
(5K)



- **1917**
V. Slipher. Messung
der Radialgeschw.
von Spiralnebeln
(Rotverschiebung)
- A. Einstein: Erstes
kosmologisches
Modell (Statisch)

- **1922-1924**
A. Friedmann
entwickelt dynamische
kosmologische Modelle

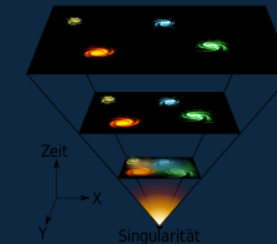
$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\lambda c^2}{3}$$



- **1929**
E. Hubble/Humason
entdecken $V = H_0 \cdot D$
($H_0 \approx 500 \text{ km. s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$)



- **1931**
G. Lemaître
Geburtstunde der
Urknall Theorie



- **1965**
A. Penzias & R.W.
Wilson entdecken
die CMB Strahlung



λ – Λ CDM: Standard Modell der Kosmologie

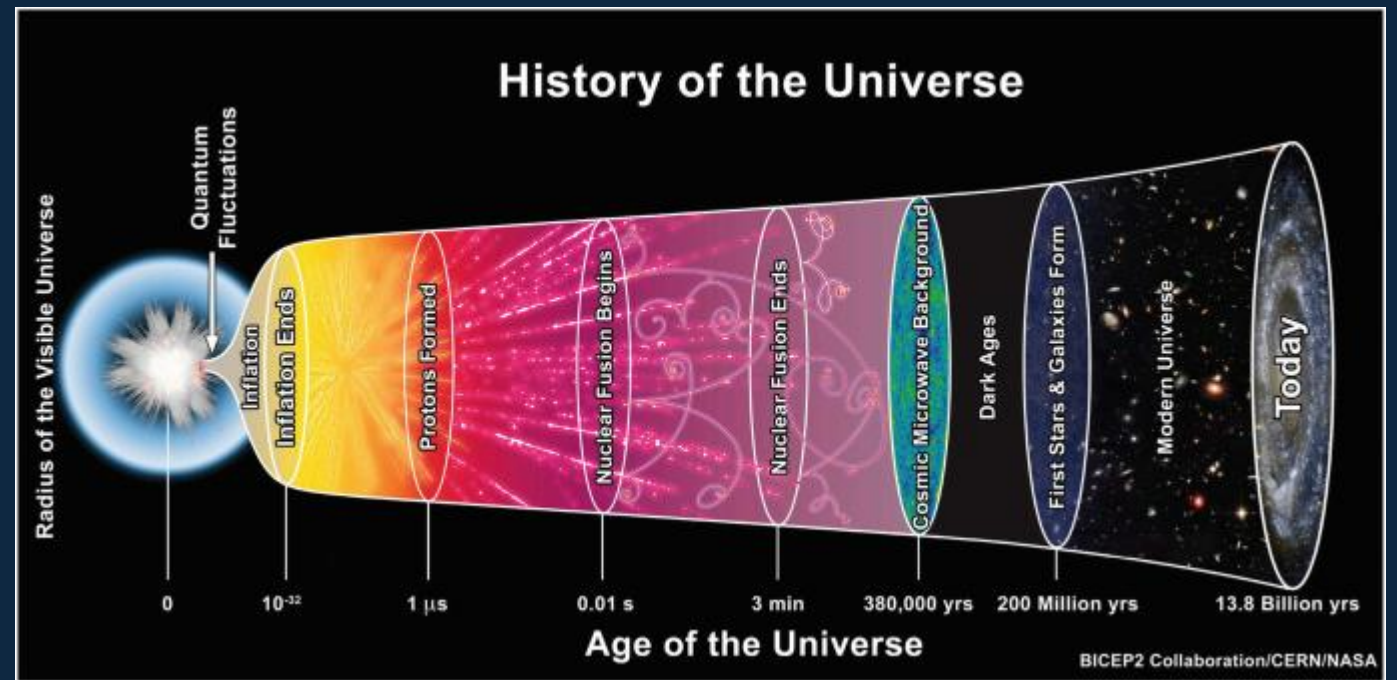
- Beschreibt mit Hilfe der **Friedmann Gleichungen** ein expandierendes Universum mit einem Anfang (unter der Annahme dass das Universum **Homogen** und **Isotrop** ist)
- Beinhaltet 3 Komponenten:
 - Kosmologische Konstante interpretiert als **Dunkle Energie** (λ)
 - **Kalte Dunkle Materie** (CDM)
 - Normale Materie und Strahlung
- Ergänzt mit der Annahme einer **Inflation**

Parameter	Wert	Bedeutung
100θ	$2,226 \pm 0,016$	Winkelskala des ersten akustischen Maximum (verknüpft mit Ω_0)
Ω_b	$0,044 \pm 0,0017$	Massendichte Baryonen
Ω_m	$0,30 \pm 0,04$ $0,267 \pm 0,019$	Massendichte Materie gesamt
τ	$0,066 \pm 0,016$	Optische Tiefe Reionisierung
A_s	$(2,215 \pm 0,13) \cdot 10^{-9}$	Amplitude der Temperaturschwankungen
n_s	$0,9653 \pm 0,0048$	Spektralindex der Dichteschwankungen

Quelle [6] - Wiki

- Das Mathematische Modell benötigt nur 6 Parameter (plus weitere ableitende Größe)

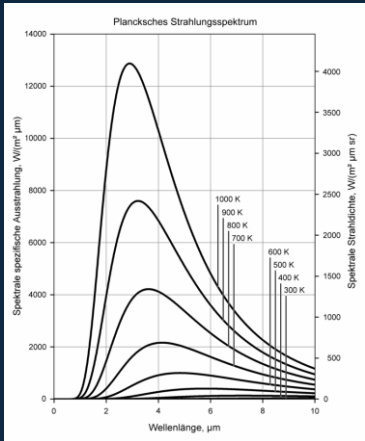
Thermische Entwicklung



Credit: NASA

Thermische Entwicklung

Schwarzkörper-Spektrum

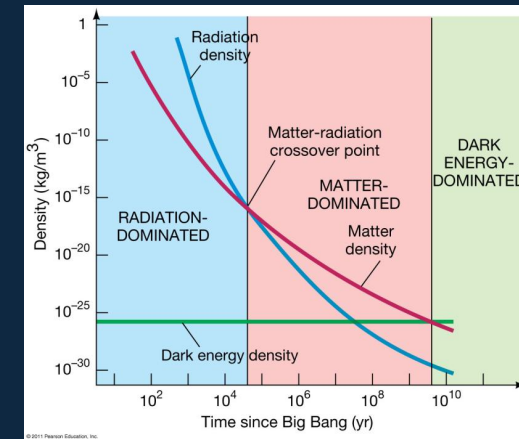


$$\epsilon(\nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

- Spektrale strahlungsdichte zerlegt in Frequenz
- Aus der Integralberechnung über alle Frequenzen folgt:

$$\epsilon_{rad} \propto T^4$$

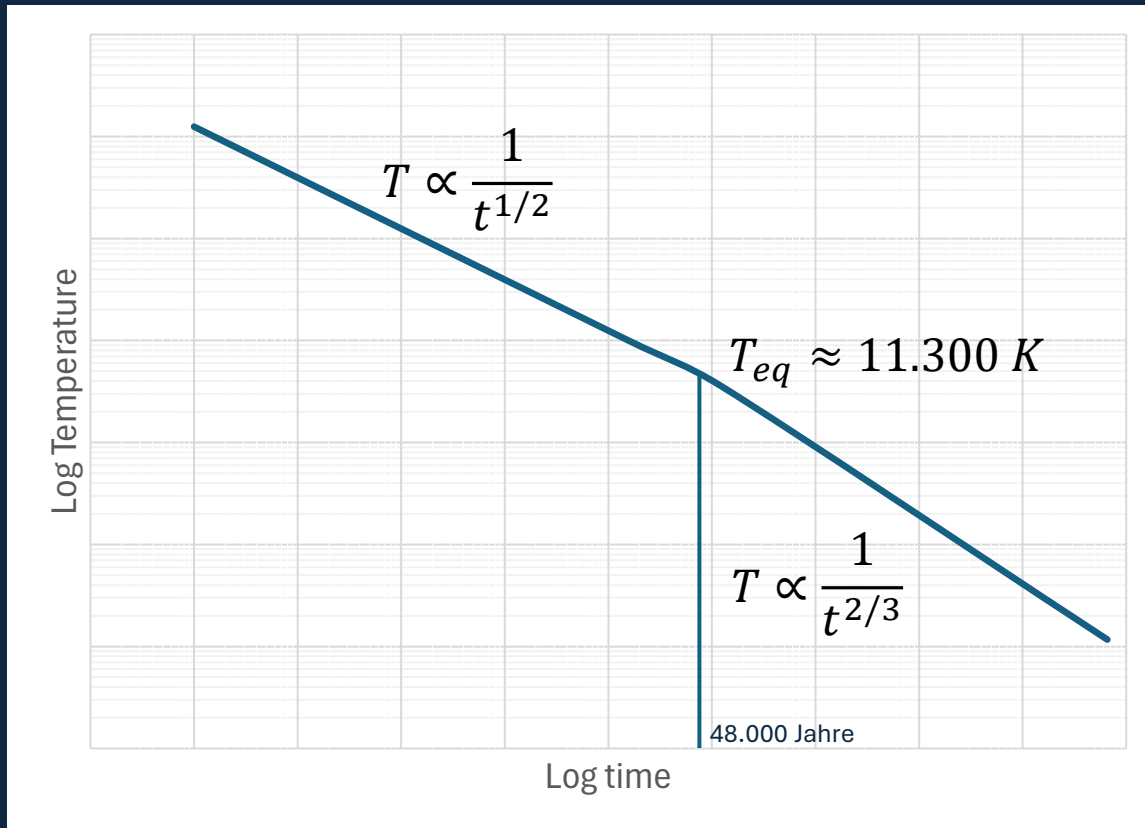
Strahlungsenergie Dichte



$$\epsilon_{rad} \propto \frac{1}{a^4}$$

$$T \propto \frac{1}{a}$$

Thermische Entwicklung



Praktische Übungen:

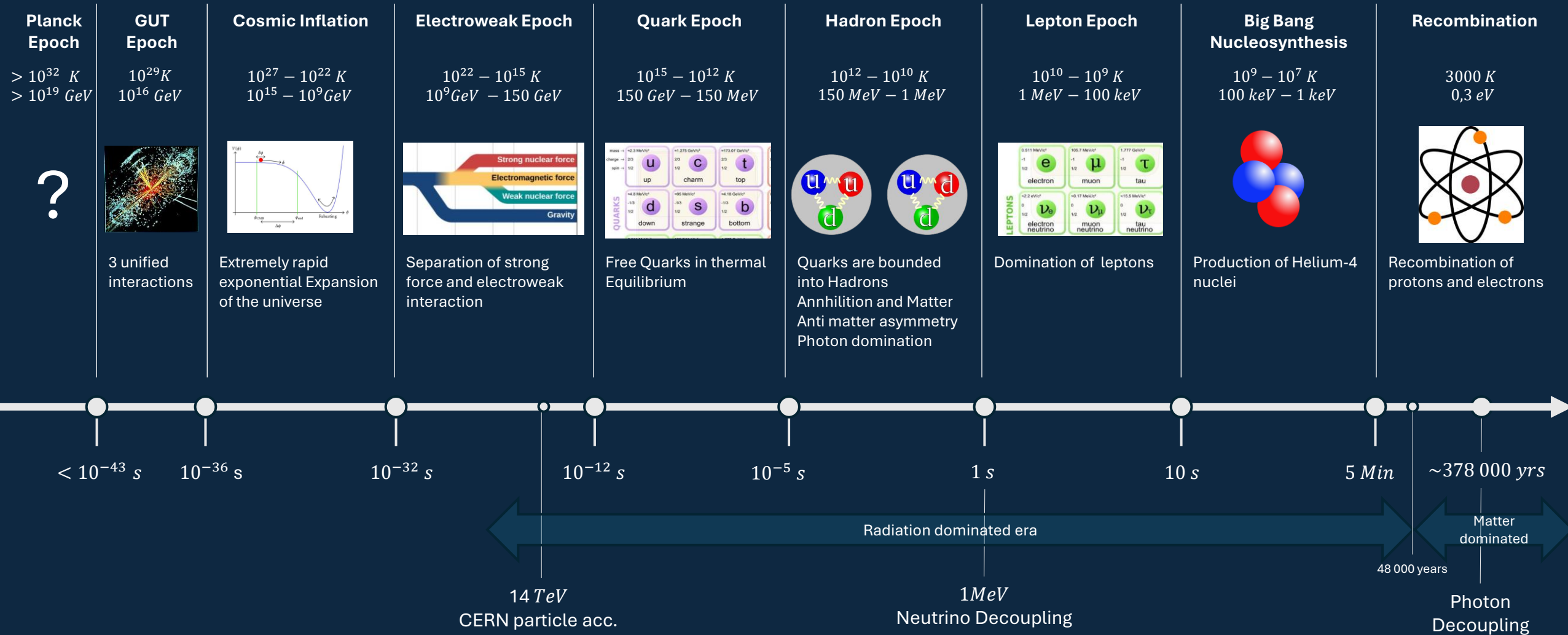
- Wann fand die Rekombination statt ($T_{rek} \sim 3000 K$) ?

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{weil Materie Dominiert bei Rek.})$$

$$t_{Rek} = 13,8 \text{ Mrd J} \left(\frac{3000 K}{2,726 K}\right)^{-3/2} \approx 350.000 \text{ Jahre}$$

- Welche Temperatur hat das Universum nach 1 s?

Thermische Entwicklung



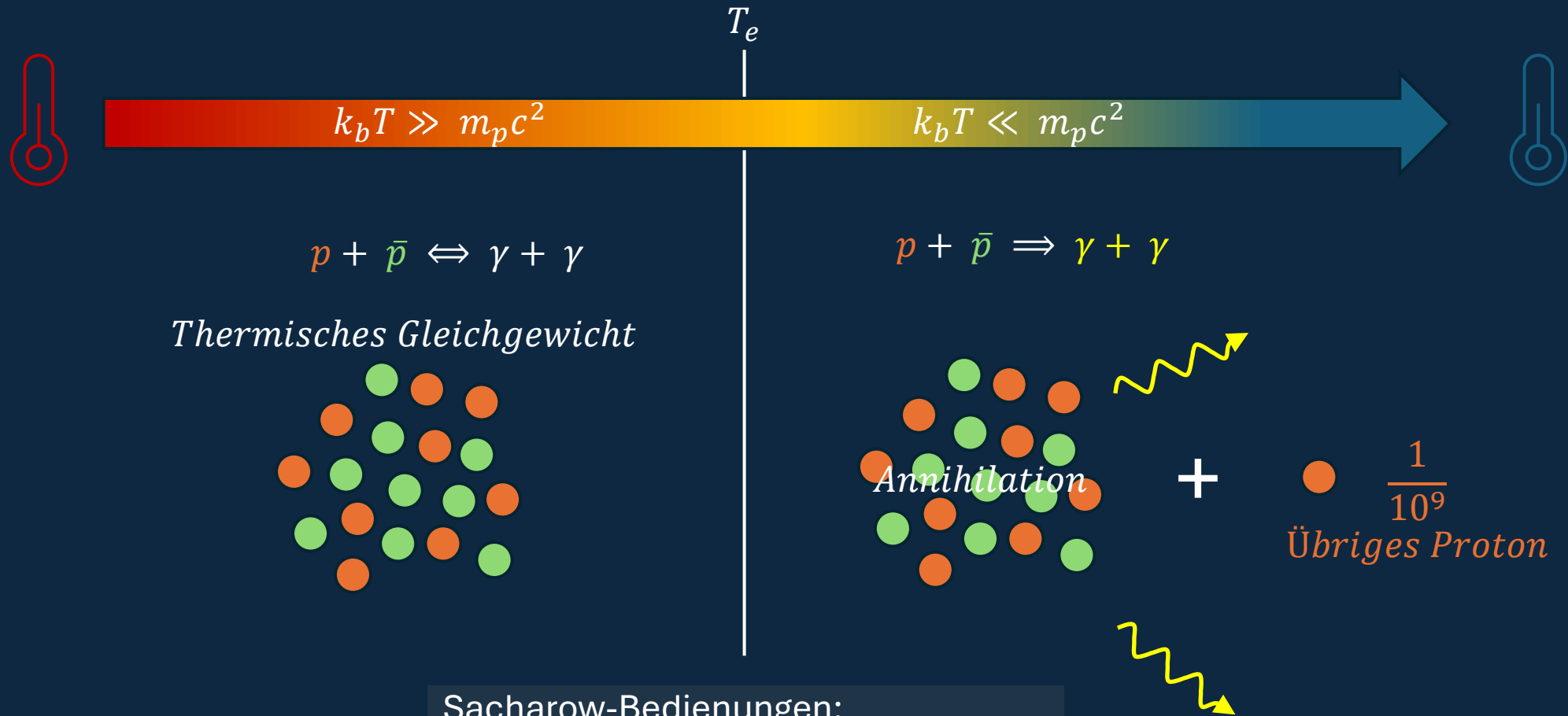
Teilchenhäufigkeit, Freeze-out

- Die Häufigkeit (Anzahldichte) der Teilchen hängt von 2 Parameter ab:
 - Reaktionsrate $\Gamma(t)$, *Beispiel* $n_H + \gamma \Leftrightarrow n_{H^+} + e^-$: wenn das Gleichgewicht erreicht wird (t_e), dann ist die Reaktionsrate Konstant
 - Expansionsrate $H(t)$ wegen Ausdehnung des Universums
- Wenn $H \gg \Gamma$: Expansion dominiert auf Reaktionsrate. Die Anzahl der Teilchen bleibt dann Konstant und die Dichte $n \propto a^{-3} \Rightarrow$ Einfrieren (Freeze-out)
- Wenn $H \ll \Gamma$: Die Teilchenhäufigkeit wird dann durch die Reaktion bestimmt und erreicht irgendwann ein Gleichgewicht $n \approx n_e(a)$
- Am Anfang des Universums dominiert $\Gamma(t)$
- Beispiel : Baryon to photon ratio
 - Aus der Bose-Einstein Statistik: $n_\gamma \approx 410 \text{ cm}^{-3}$
 - Verhältnis Baryonen/Photonen ist eingefroren: $\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} \approx 10^{-9}$
 - Obwohl die gesamte Energiedichte der Baryonen wesentlich höher ist als die Strahlung ($\Omega_{B,0} \gg \Omega_{r,0}$), gibt es weitaus mehr Photonen als Baryonen !



Vertiefung „Ratio Baryon to Photon“

Asymmetrie Materie-Antimaterie (Baryogenese)



Sacharow-Bedingungen:

- Verletzung der Baryonen-Zahl
- Verletzung der C und CP Symmetrie
- Thermodynamisches Ungleichgewicht

Primordiale Nukleosynthese

$\gg 1,3$
MeV

Therm. Gleichgewicht

$$\frac{n}{p} \approx 1$$



Maxwell – Boltzmann Verteilung:

$$\frac{n}{p} = \exp\left[-\frac{(m_n - m_p)c^2}{k_b T}\right] \quad \Delta mc^2 = 1,3 \text{ MeV}$$

0,8 MeV

10^{10} K

Freeze out

$$\frac{n}{p} \approx 1/6$$

• Expansionsrate dominiert =>
Verhältnis $\frac{n}{p}$ wird eingefroren

Beta Decay $\frac{n}{p} \approx 1/7$

Zerfall freier Neutronen

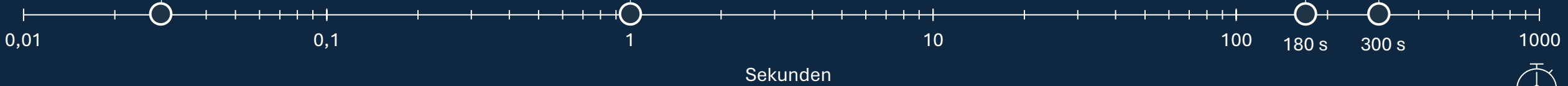
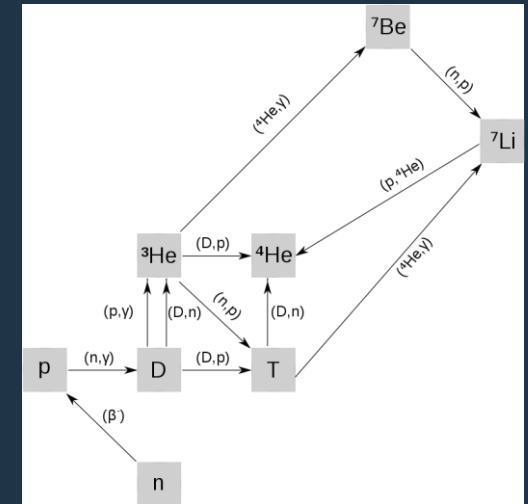
Halbwertzeit n: 600 s

0,1 MeV

10^9 K

Kernfusion

als erstes $p + n \rightarrow D + \gamma$



Primordiale Nukleosynthese Ergebnisse

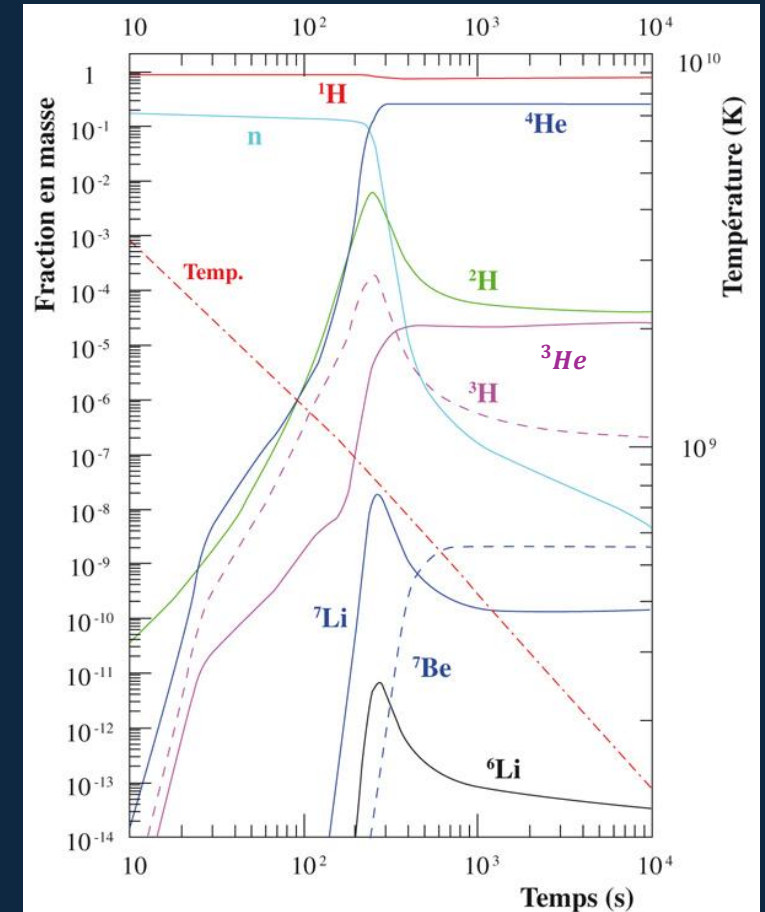
Fraction Mass Helium-4 (Helium Häufigkeit)

$$Y_p = \frac{\rho_{He}}{\rho_{Total}} = \frac{4 \cdot n_{He} \cdot m_p}{n_p m_p + n_n m_n} \quad \left[\begin{array}{l} n_{He} \text{ number density of Helium nuclei} \\ m_p \approx m_n \end{array} \right]$$

Alle Neutronen werden in Helium eingefangen und 2 Neutronen werden für 1 Helium-4 Kern benötigt.

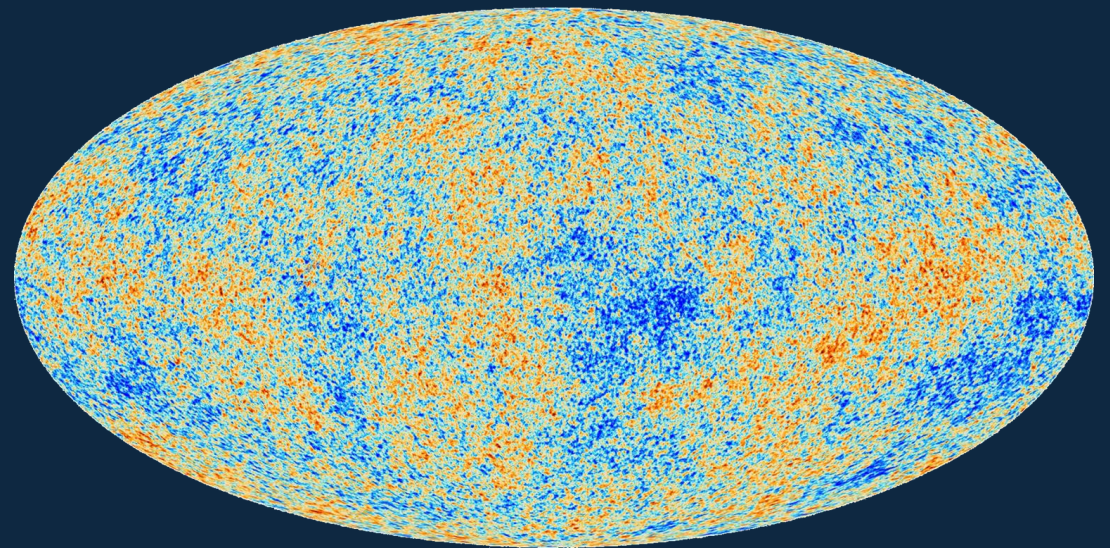
Dann gilt $n_{He} \approx \frac{n_n}{2}$

$$Y_p \approx \frac{2 \cdot n_n}{n_p + n_n} = \frac{2 \left(\frac{n}{p}\right)}{1 + \left(\frac{n}{p}\right)} = \frac{2 \left(\frac{1}{7}\right)}{1 + \left(\frac{1}{7}\right)} = 0,25 \quad \frac{n_n}{n_p} = \frac{n}{p}$$



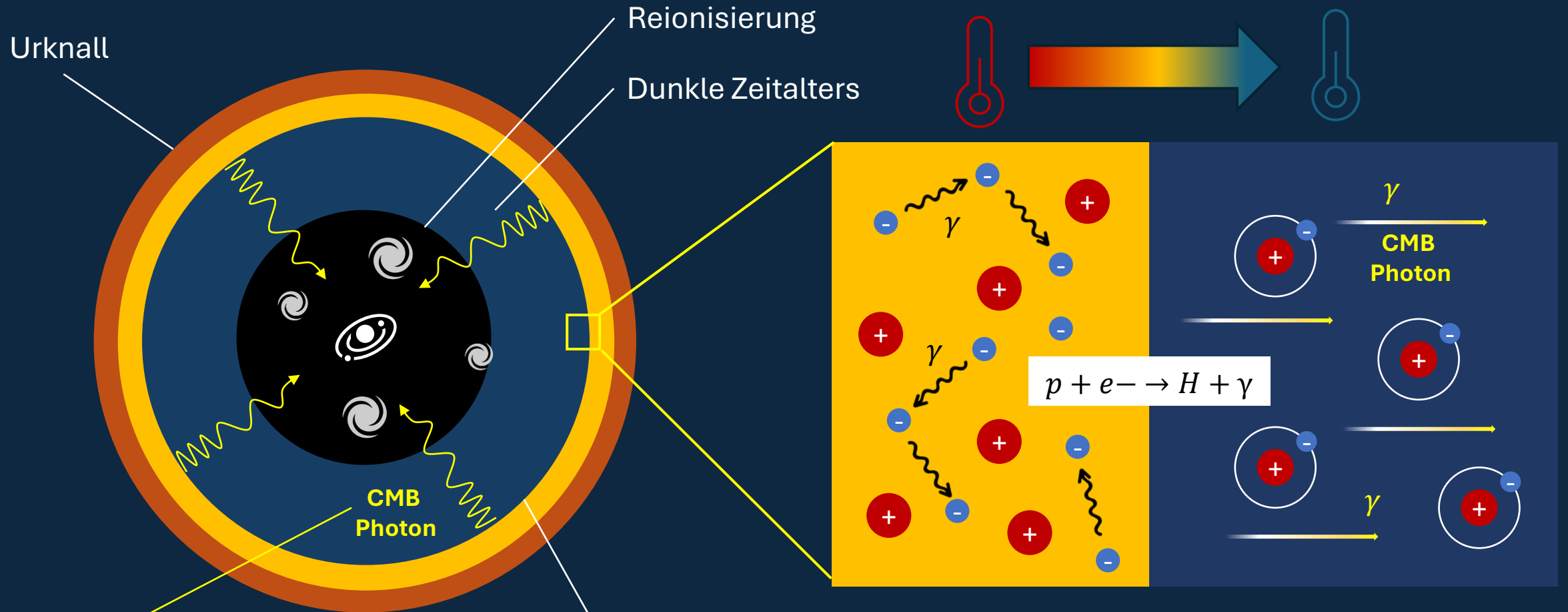
Credit: CNRS

CMB



Credit: ESA

Rekombinationsepoch

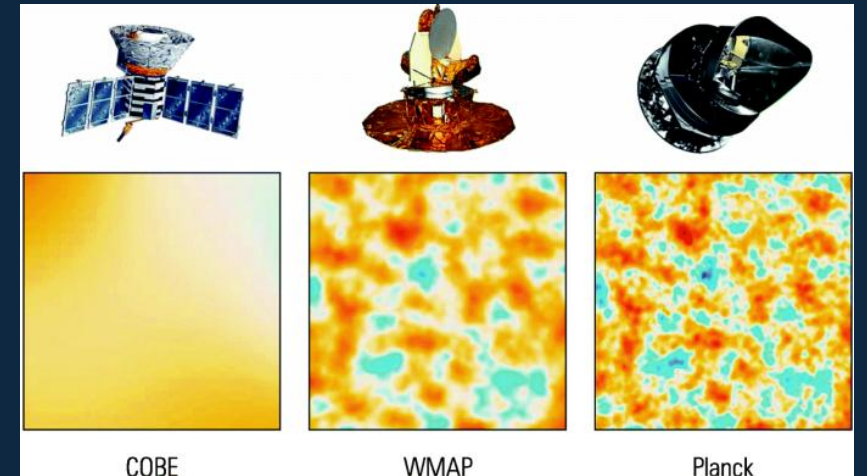
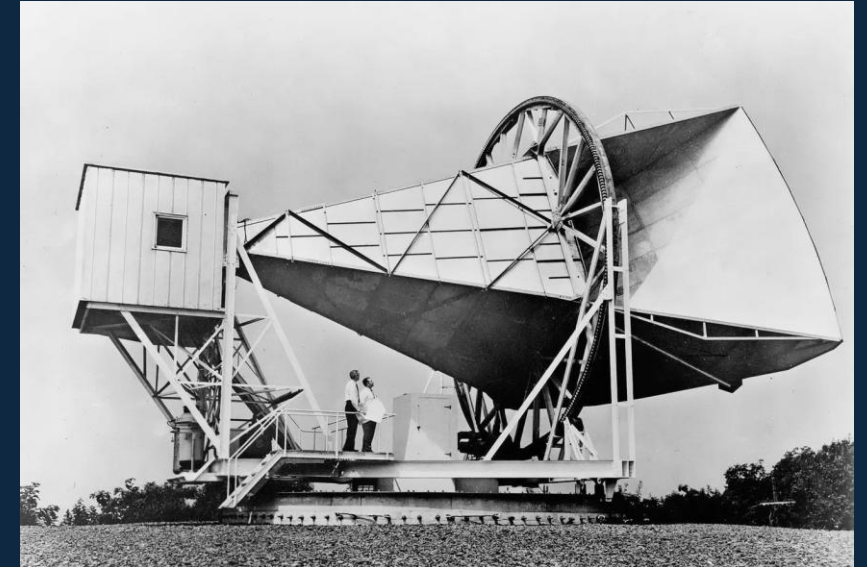


Wellenlänge wird ca. um ein Faktor 1000 rotverschoben ($\mu\text{m} \rightarrow \text{mm}$)

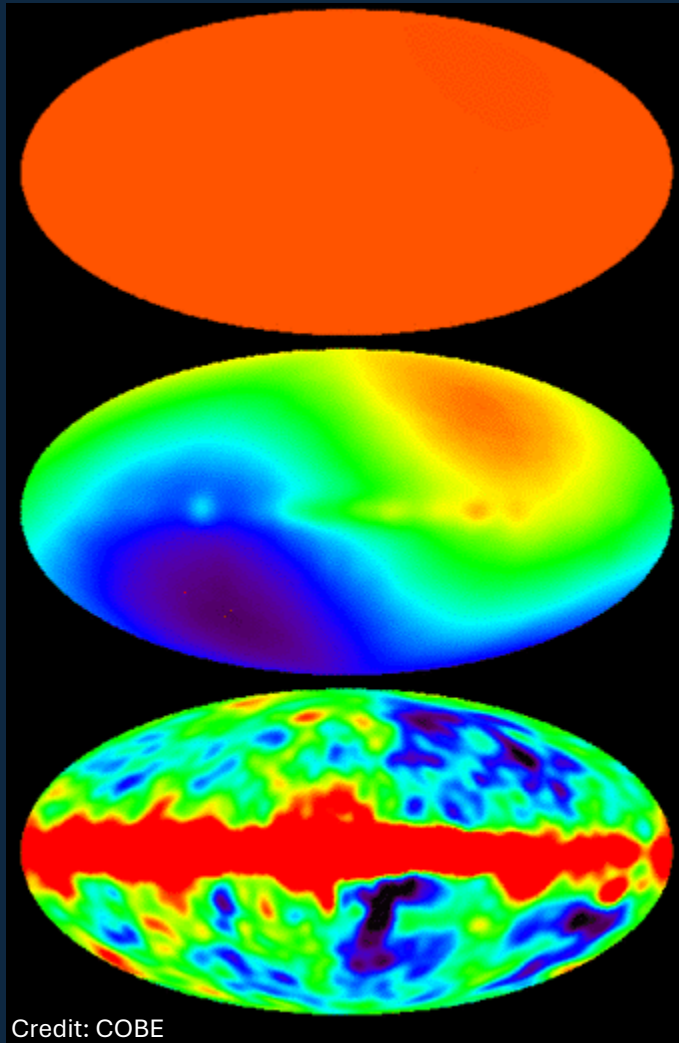
Last Scattering Surface: CMB entstand aus dieser Fläche (letzte Streuung der Photonen), auch **Baby Foto des Universums** genannt

Vorhersage, Entdeckung und Vermessung des CMB

- 1940: G Gamov postuliert die Hintergrundstrahlung
- 1948: R Alpher R Hermann schätzen die Temperatur auf 5K
- 1964: R Dicke, D Wilkinson planen Konstruktion eines Radioteleskops für die Entdeckung des CMB
- 1965: A Penzias und R Wilson (Bell Labs) entdecken zufällig die CMB - **Nobelpreis 1978**
- 1989-1996: COBE (Cosmic Background Explorer, NASA)
 - Bestätigung Temperatur Spektrum Schwarzschräger
 - Entdeckung Temperatur Fluktuationen
 - **Nobelpreis 2006**
- 2001-2012 WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)
 - Temperatur Fluktuationen mit hoher Präzision gemessen (bis zum 3. Peak)
 - Messung der Polarisation Typ E Fluktuationen
 - Genaue Bestimmung der Kosmologische Parameter: H_0 , $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{\lambda,..}$
- 2009-2018: PLANCK
 - Temperatur und Polarisation Fluktuationen mit noch höheren Auflösung (bis zum 7. Peak)



Himmelskarte der Temperaturfluktuationen (COBE)

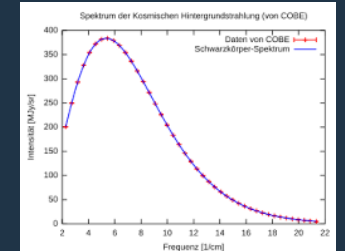


Credit: COBE

Emmanuel Blum

- $T = 2,7 K$

Isotrop,
Schwarzkörper-
strahlung



- $\delta T \sim 10^{-3} K$

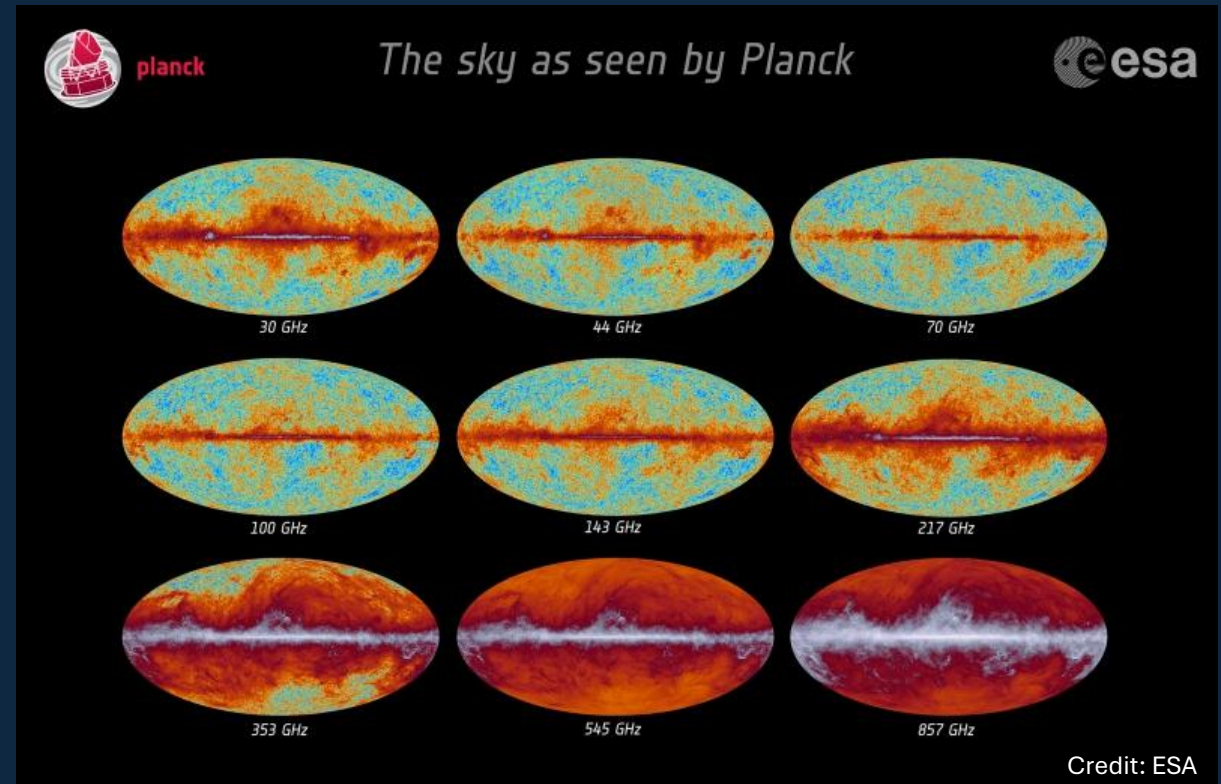
Dipol Effekt: Bewegung der
Milchstraße, Sonne, Erde bzgl. CMB

- $\delta T \sim 10^{-5} K$

Primäre Fluktuationen nach dem
alle Störungen entfernt wurden
(Staub, Synchrotron, Radio..)

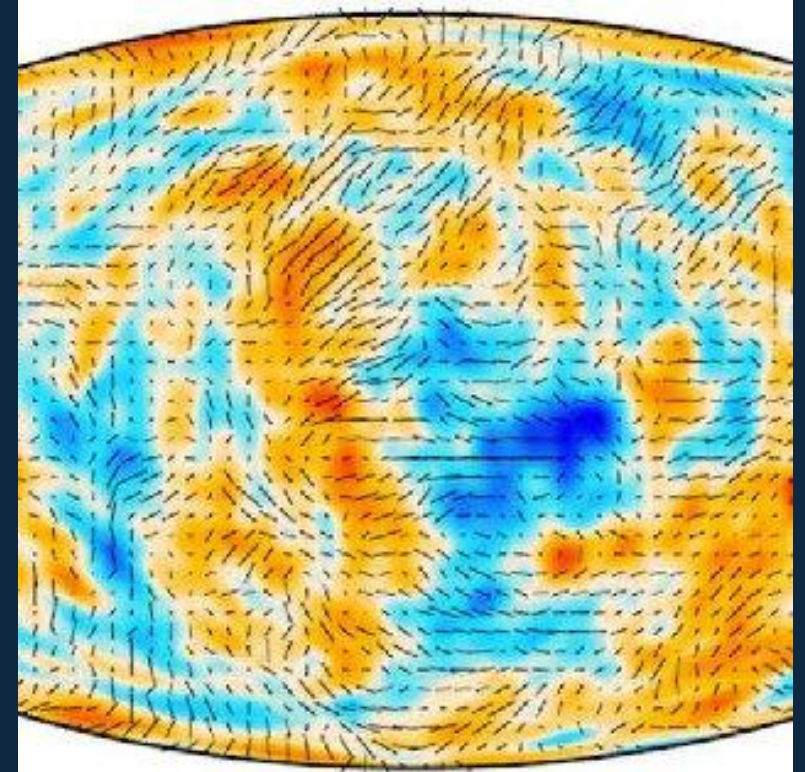
Himmelskarte der Temperaturfluktuationen (Planck)

- Betrieb: 2009-2013 am Lagrange Punkt L2
- 3 Ziele:
 - Messungen in verschiedenen Frequenzen von 30 GHz ($\lambda \approx 10 \text{ mm}$) bis zu 857 GHz ($\lambda \approx 0,3 \text{ mm}$) um CMB von der Vordergrundstrahlung zu bereinigen
 - Hohe Winkelauflösung bis zu $4,5'$ (verglichen zu der Granularität des CMB)
 - COBE: 7°
 - WMAP: $15'$
 - Polarisationsmessungen



Polarisation im CMB

- Was ist die Polarisation?
 - Beschreibt die Richtung in der das elektrische Feld eines Lichtstrahl schwingt
- Welche Mechanismus polarisieren das CMB ?
 - Thomson Streuung: bei der Rekombination / Entkopplungsphase
 - Primordiale Gravitationswellen
- Arten von Polarisation:
 - Typ E : einfach zu detektieren. Ähneln einem Radial oder Wirbelmuster und entstehen durch Dichteschwankungen und damit verbunden mit Temp. Schwankungen
 - Typ B: noch nicht entdeckt. Verursacht durch Gravitationswellen im frühen Universum



Credit : ESA

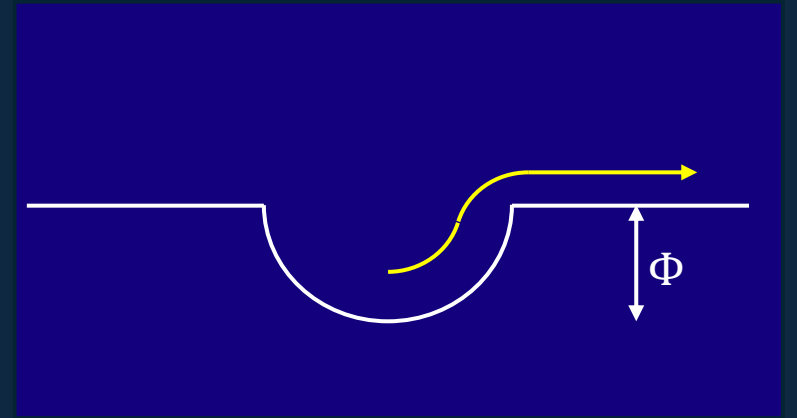
Primäre Anisotropie

Primäre Anisotropie: durch Effekte zum Zeitpunkt der Entstehung der Strahlung.

Dichtefluktuationen: winzige Unterschiede in der Dichte der Materie erzeugen Temperaturschwankungen im CMB.

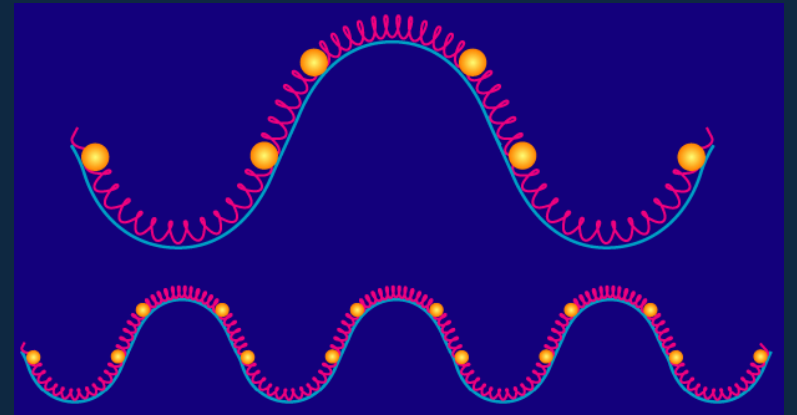
- **Sachs-Wolfe-Effekt:**

- Photonen aus einem starken Gravitationsfeld werden rot verschoben
- Photonen aus niedrigem Gravitationspotenzial werden ins Blaue verschoben



- **BAO Akustische Schwingungen:**

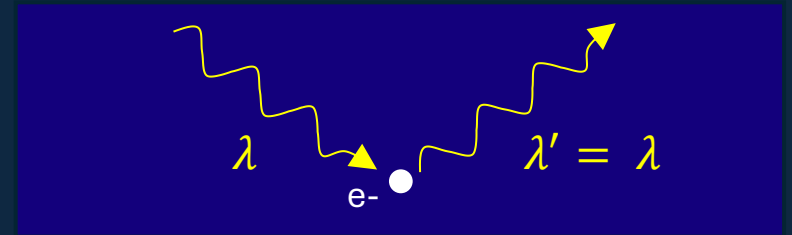
- Wechselspiel von Gravitation und Strahlungsdruck zwischen Photonen-Baryonen (=> Auswirkung auf die Anisotropie Spektrum der CMB und dann auch auf die Verteilung der Galaxien)



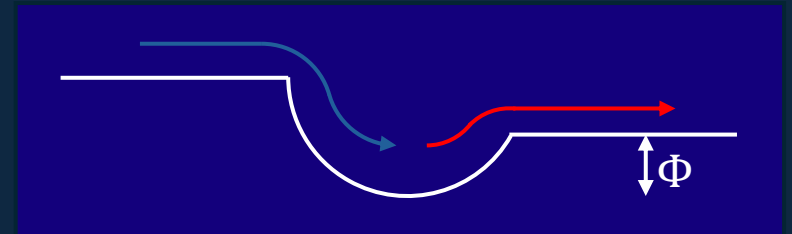
Sekundäre Anisotropie

Sekundäre Anisotropie: verursacht durch heißes Gas oder Gravitationspotential nach der Rekombination und vor dem Beobachter

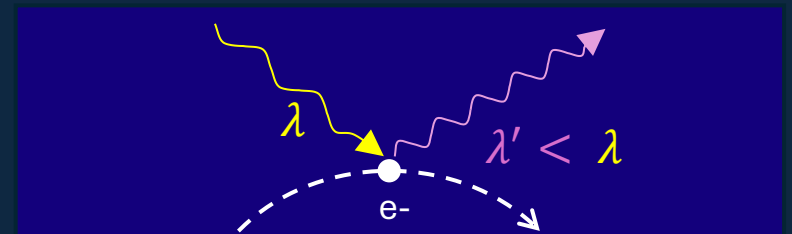
- **Thomson Streuung** nach Reionisation.
Ca. 10% CMB ist polarisiert



- Beim Durchlaufen von Potentialtöpfen werden Photonen zuerst Blau dann Rot verschoben während aber das Universum in dieser Zeit sich weiter ausgedehnt hat: **Integrierten Sachs-Wolfe Effekt**

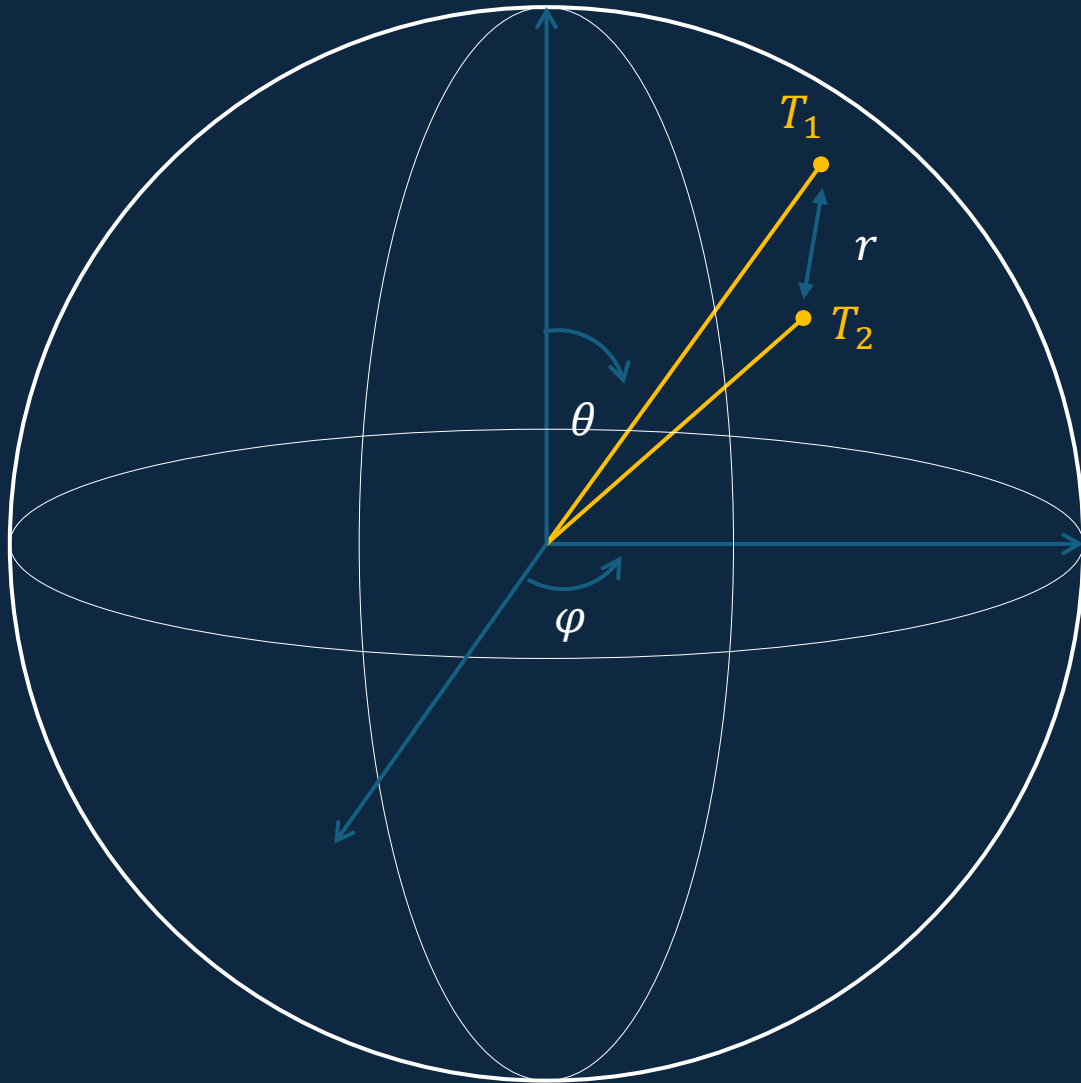


- Heißes Gas von Galaxienhaufen können Photonen streuen (durch inversen Compton Streuung steigen Energie und Frequenz der Photonen): **Sunyaev-Zel'dowich-Effekt**



In der Regel werden die Sekundäre Anisotropie rausgerechnet

Statistische Analyse des CMB



Emmanuel Blum

- CMB wird mit einer **Kugelflächenfunktion** zerlegt. Ziel ist die Anisotropie in Abhängigkeit von ihrer räumlichen Größe zu untersuchen.
- Für 2 Punkte mit dem festen Abstand r bestimmt man ihre **relative Temperatur Differenz**:

$$\Delta T = \frac{|T_1 - T_2|}{\langle T \rangle}$$

- Man berechnet dies für alle Punktpaare mit dem festen Abstand r und mittelt über diese. Man erhält den Wert des **Leistungsspektrums $C(r)$** und wiederholt für andere Punktabstände.
- In der Praxis betrachtet man das Leistungsspektrum in Bezug auf die Multipolordnung l ($l \approx \frac{180^\circ}{\theta}$)

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} |a_{lm}|^2$$

Statistische Analyse des CMB

- Bei großen Skalen $\theta > 1^\circ$ (Horizont LSS: Fläche der letzten Streuung):

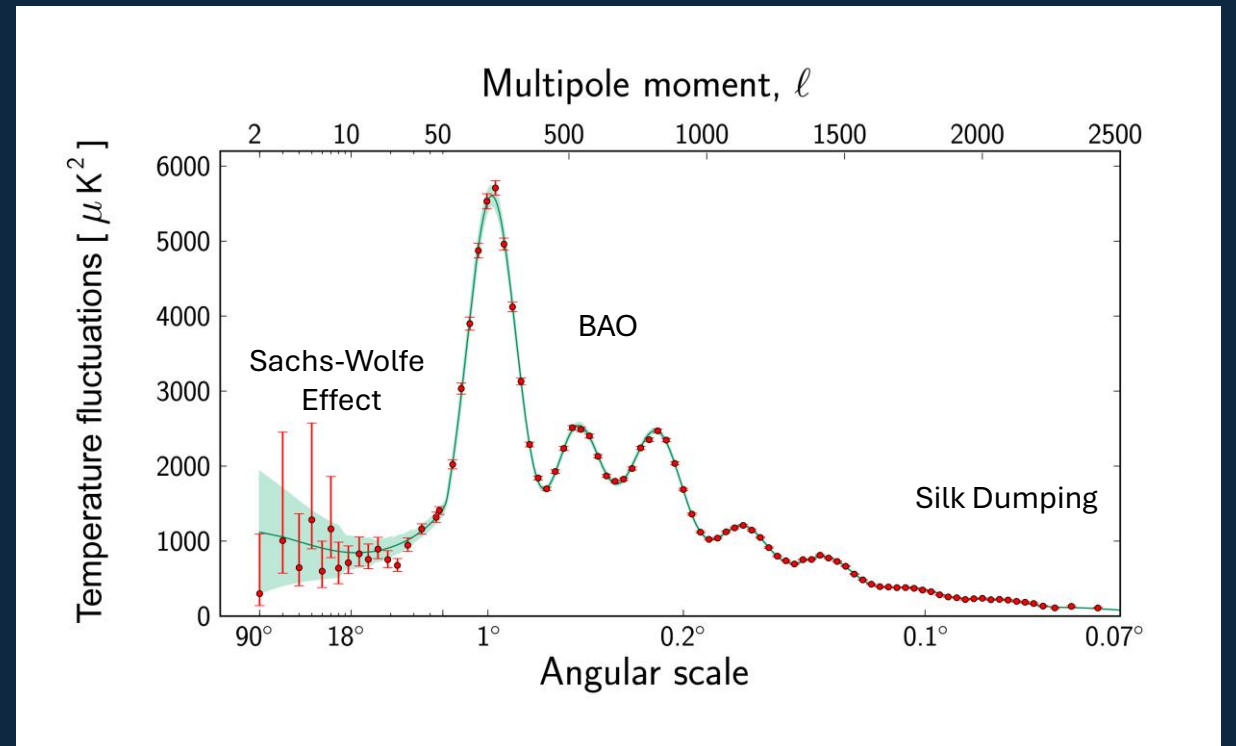
- Sachs-Wolfe-Effekt dominiert

- Bei kleinen Skalen $\theta < 1^\circ$:

- BAO Schwingungen im Plasma
- Strukturen mit einem Winkelskala von 1° am häufigsten

- Bei $l > 1000$

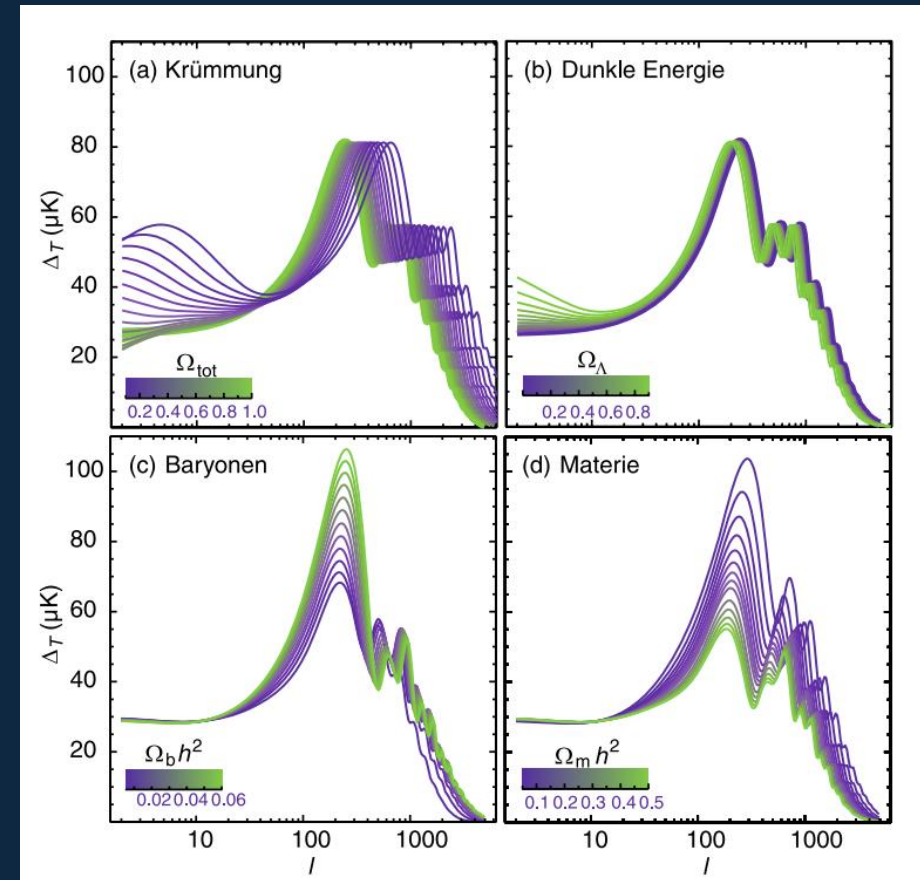
- Silk Dämpfung: Temperatur Schwankungen werden schwächer



Credit ESA

Statistische Analyse des CMB

- Genaue Form des Leistungsspektrum hängt von den kosmologischen Parameter ab:
 - Dichte Parameter: $\Omega_{tot}, \Omega_b, \Omega_m, \Omega_\lambda$
 - Hubble Parameter H_0
 - Optische Dicke τ
 - ...
- Beispiele:
 - Lage 1. Peak ist mit Krümmung, Hubble Parameter & Alter Universum verknüpft
 - Rel. Höhe 1. zu 3. Peak gibt Dichte Dunkle Materie
 - Höhe 2. Peak: Baryon Dichte
 - Gesamt Neigung Spektrum: Optische Tiefe



Quelle: [4]

Animation: <https://space.mit.edu/home/tegmark/movies.html>

Ergebnisse Planck

 Ω_i

Kosmologische Parameter

- Anpassung Dichte Parameter
- Hohe Messgenauigkeiten für die Dichteparametern
- Hubble Konstante: $H_0 = 67,27 \frac{km}{s} / Mpc$
- Einfluss von Primordiale Neutrinos (3 Familie bestätigt)



Kosmische Inflation

- (Flaches Universum bestätigt)
- Erste Messung des Spektralindex der Dichte Schwankungen ($n_s = -0,9645 \Rightarrow$ Konform mit Inflationstheorie)



Reionisation

- Einfluss auf die Polarisation Typ E
- Optische Tiefe = $0,055 \pm 0,009$
- Z Reionisation zwischen 8 und 15



Super Strukturen im Kosmos

- Gravitationspotential Dunkle Materie durch Gravitationslinseneffekt entdeckt und kartiert.
- Hierarschie Struktur Bildung bestätigt

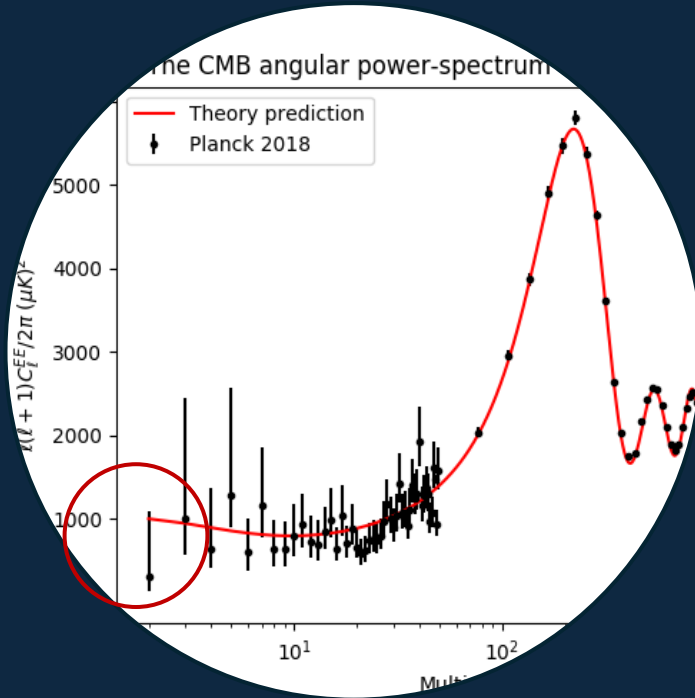


Galaxie Cluster und Super Cluster

- Entdeckung zahlreicher Galaxienhaufen durch den Sunyaev-Zel'dovich Effekt

Quelle: [6] [7]

Ungelöste Rätsel



1- Unterdrückung bei großen Skalen

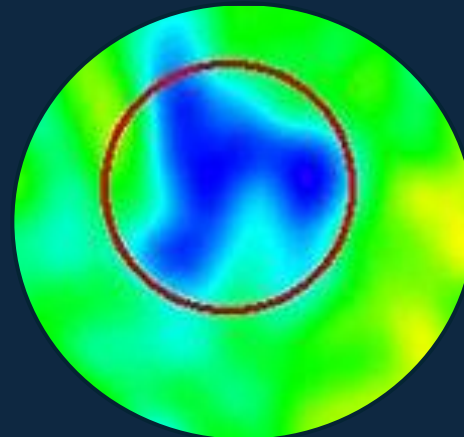
Intensität der Temperatur Fluktuationen bei Großen Winkelskalen $l=2$ sind niedriger als erwartet.

Das Verständnis dieser Anomalien könnte Hinweise auf neue Physik liefern, die über das kosmologische Standardmodell hinausgehen.



2- Cold Spot

Region mit 5° Durchmesser mit signifikanter niedriger Temperatur. Mögliche Erklärung wäre ein Supervoid



3- Achse des Bösen

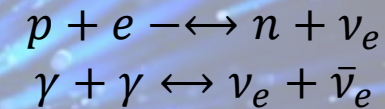
Eine bevorzugte Richtung in den CMB-Schwankungen, die mit der Ekliptikebene ausgerichtet ist. Widerspruch zum Kosmologischen Prinzip (Isotropie)

Kosmischer Neutrino Hintergrund

Neutrino:

- Elementarteilchen (Leptonen) mit sehr geringe Masse
- Sehr geringe Wechselwirkung mit Materie
- 3 Arten: $\nu_e \nu_\mu \nu_\tau$

Frühe Universum: Therm. Gleichgewicht

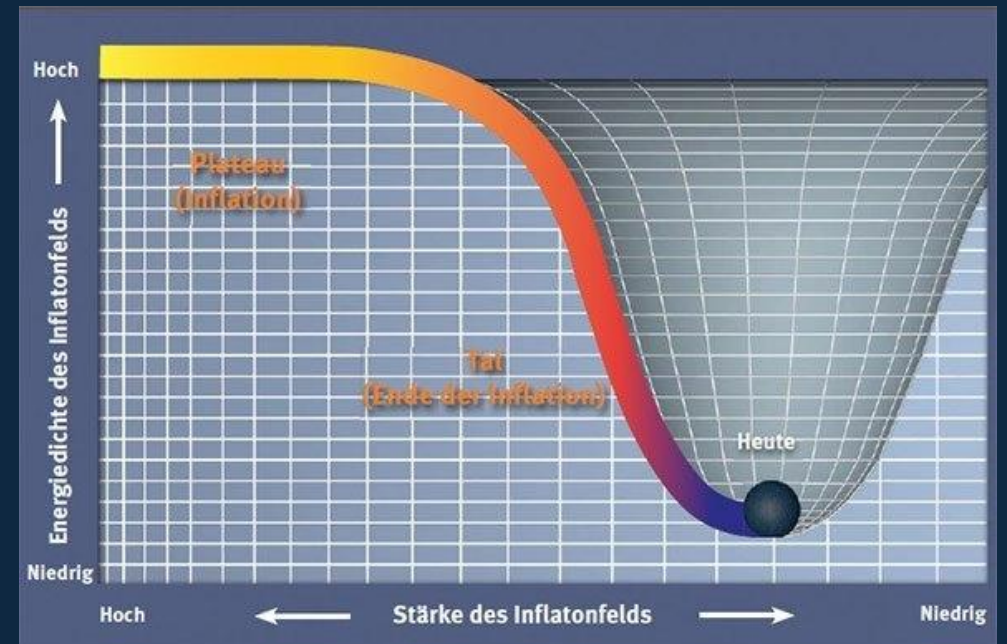


Hintergrund:

- 2s nach dem Urknall: Entkopplung der Neutrinos von der restlichen Materie
- Temperatur geschätzt auf bei 1,95 K
- $\Omega_\nu = 0,68 \Omega_{rad}$ (masselose Neutrinos)
- Noch nie gemessen

- Relativistische Teilchen sind keine gute Kandidaten für Dunkle Materie (Bildung von Galaxien unterdrückt)
- Im $\lambda - CDM$ Modell werden Neutrinos nicht berücksichtigt

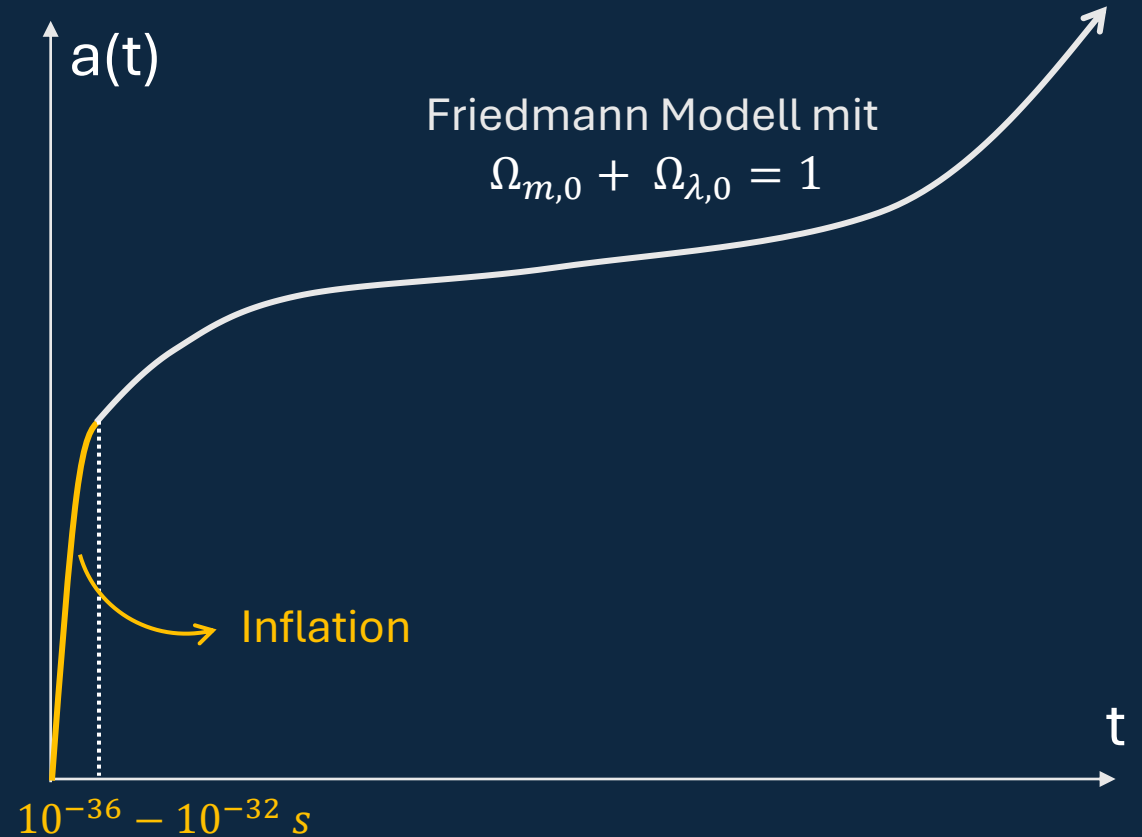
Kosmische Inflation



Credit: scinexx.de

Kosmische Inflation

- Hypothetische rasche Expansion unmittelbar nach dem Urknall um ca. ein Faktor 10^{30} !
- Konzept eingeführt von A. Guth (1979)
- Löst elegant folgende Probleme:
 - Flachheitsproblem
 - Homogenitätsproblem (Horizont Problem)
 - Anisotropie der Hintergrundstrahlung & Struktur Bildung (Dichte Fluktuationen als folge der Quantenfluktuationen)
 - (Monopolproblem)



Problem mit Hubble Radius

- Horizont Universum : $R_H = \frac{c}{H_0}$ (Hubble Sphäre)

	Plank Zeit	heute
Skalenfaktor	$a_p \approx 4,9 \cdot 10^{-31}$	$a_0 = 1$
Hubble Radius	$R_H(t_p) = \frac{c}{H(t_p)}$ $= 3 \cdot 10^{-33} \text{m}$	$R_{H0} = \frac{c}{H_0}$ $= 14,4 \text{ Mrd LJ}$

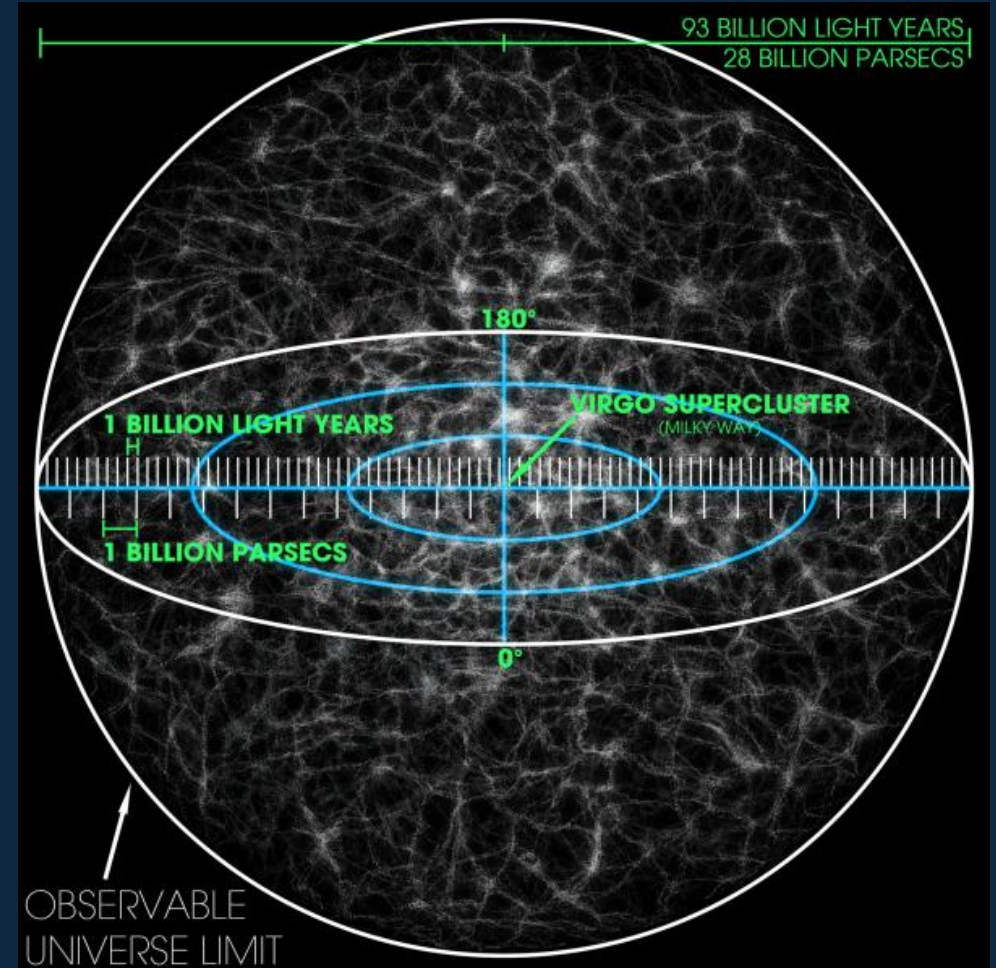
$$\Rightarrow \text{Expansionsfaktor} = \frac{a_0}{a_p} = 2 \cdot 10^{31}$$



$$R_{H0} = R_H(t_p) * \text{Expansionsfaktor}$$

$$= 6 \cdot 10^{-2} \text{m}$$

Unsinn !

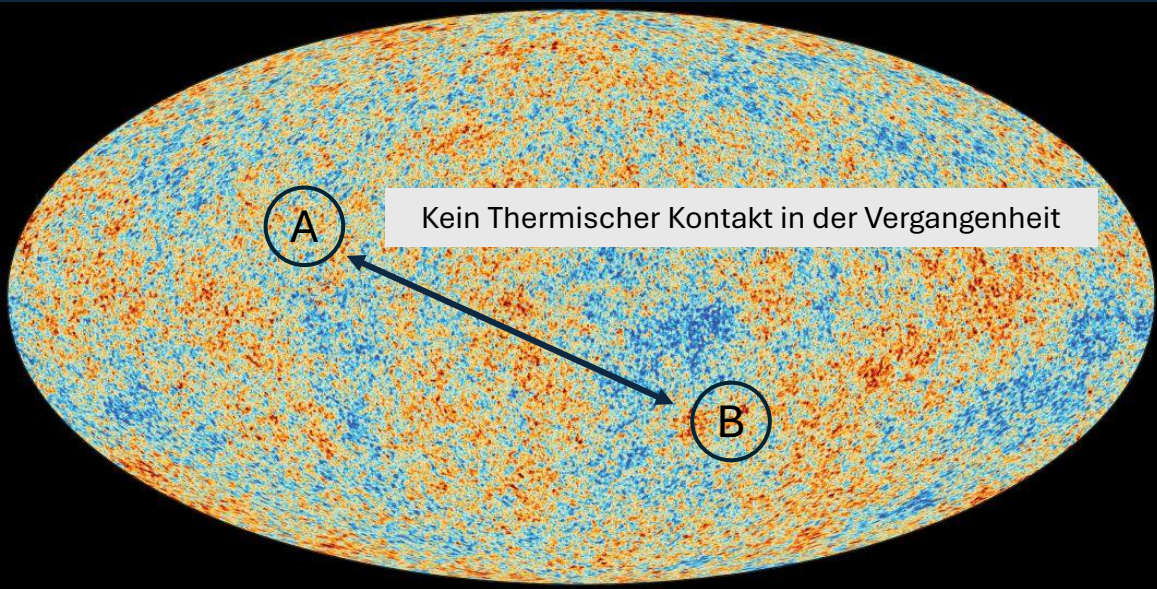


Vertiefung „Problem mit Hubble Radius“

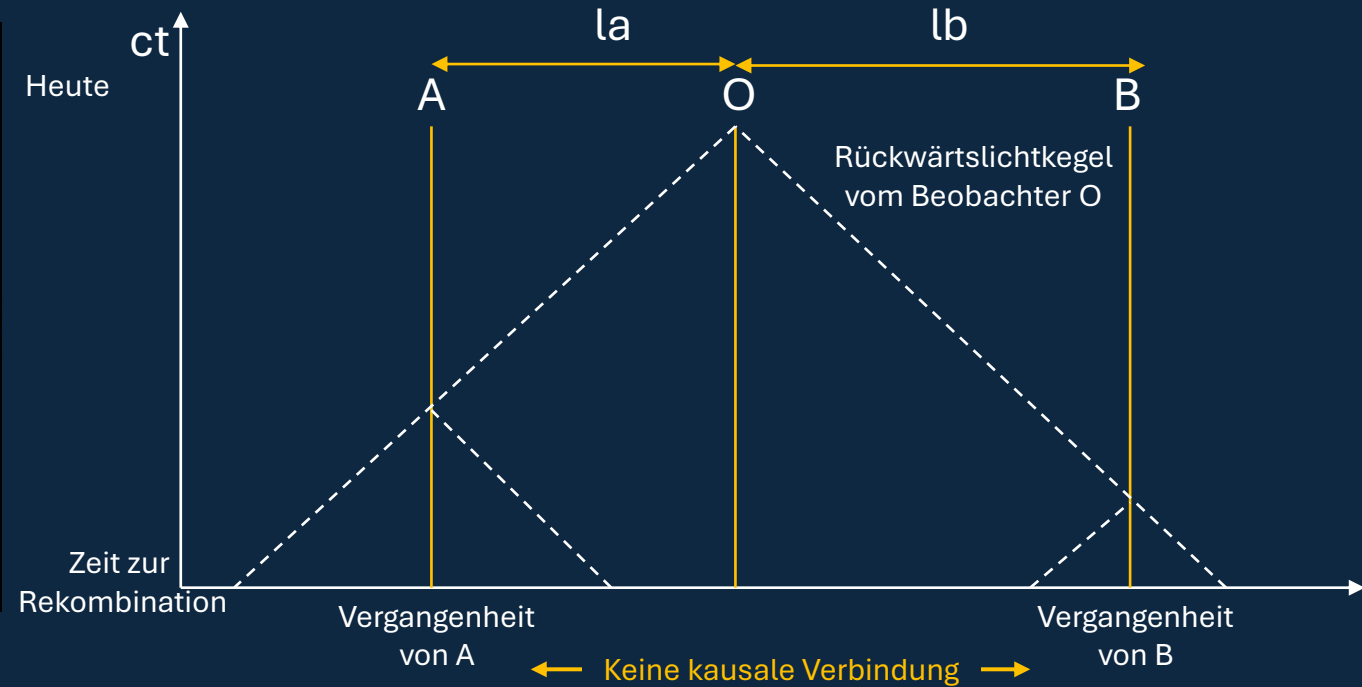
Horizont Problem

Problem: Warum sind die Temperaturunterschiede im CMB so gering?

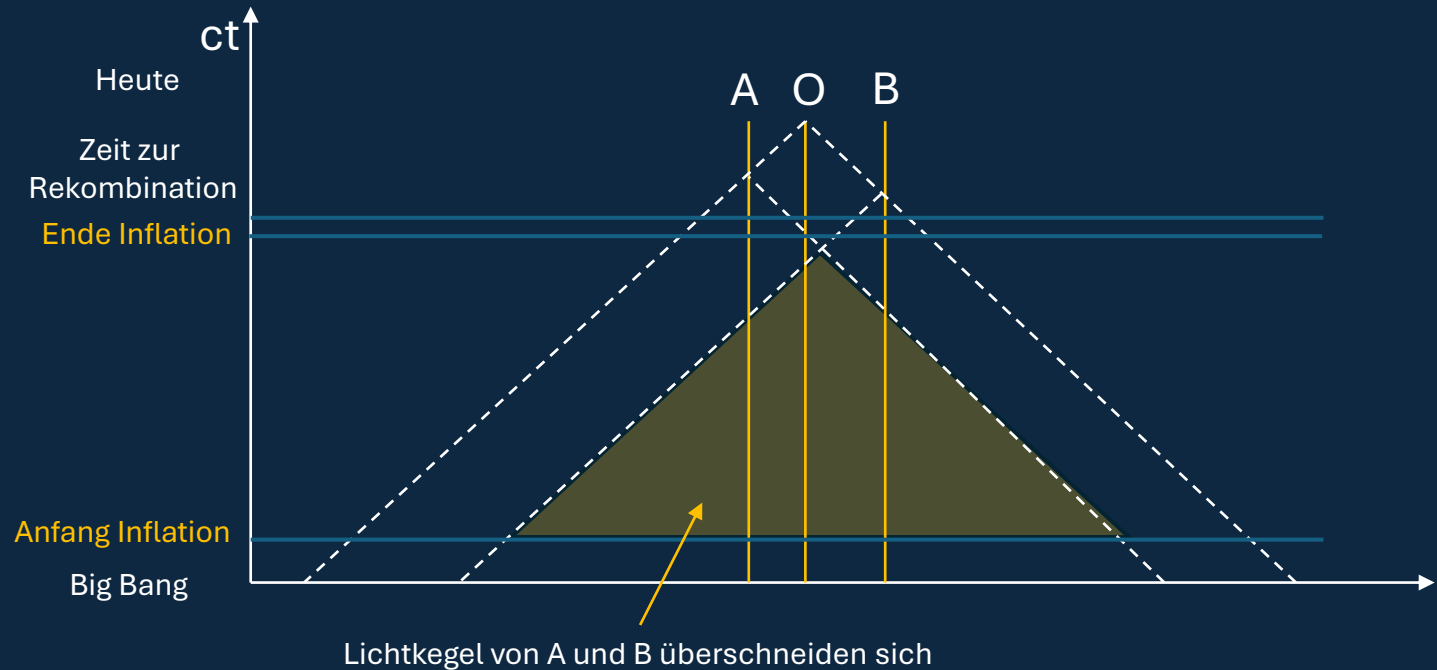
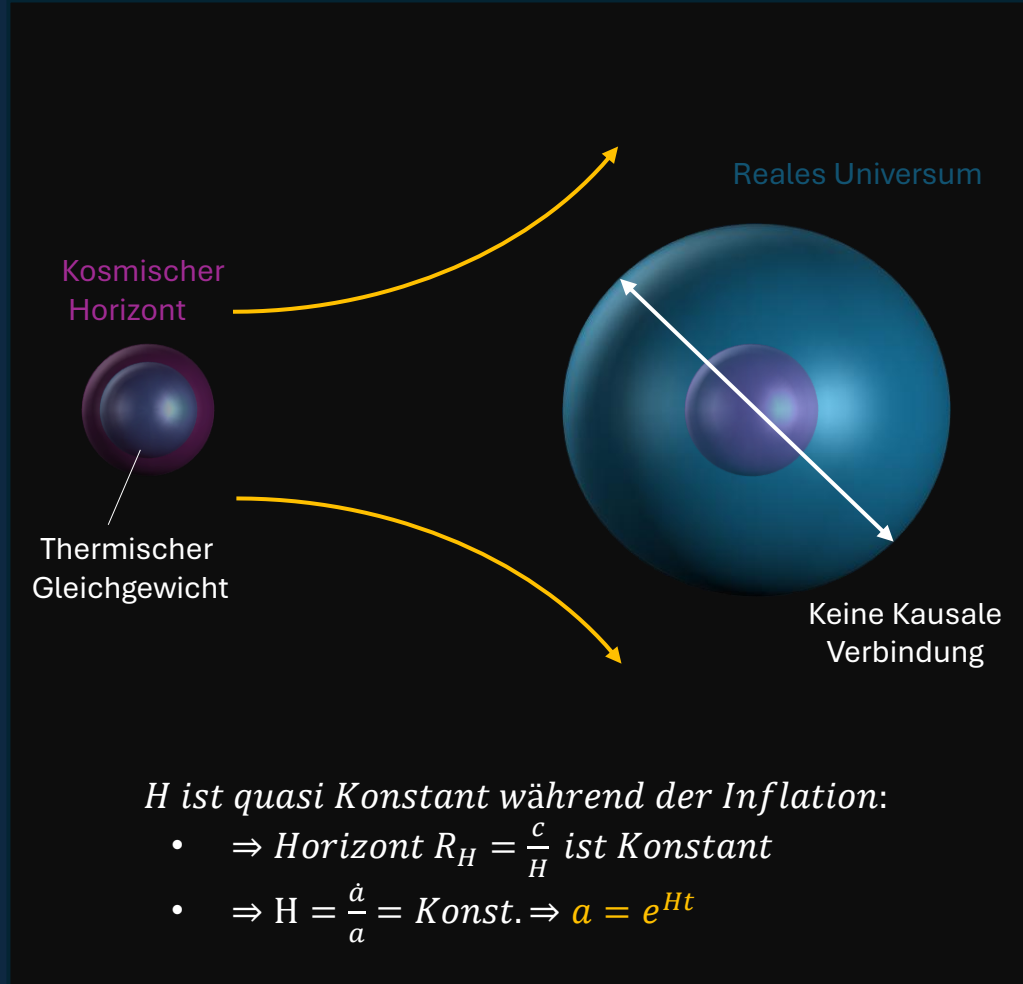
(A und B sind soweit entfernt dass es kein Informationsaustausch gegeben hat weil Lichtgeschwindigkeit begrenzt ist)



Credit: ESA



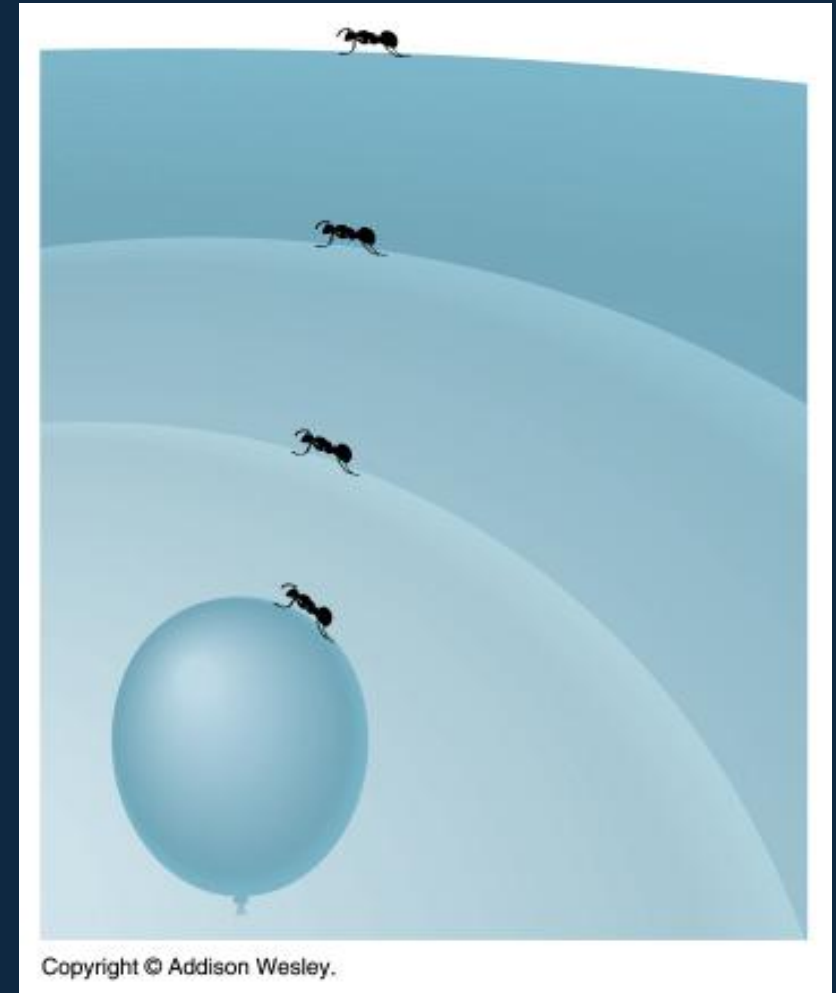
Horizont Problem



Flachheitsproblem

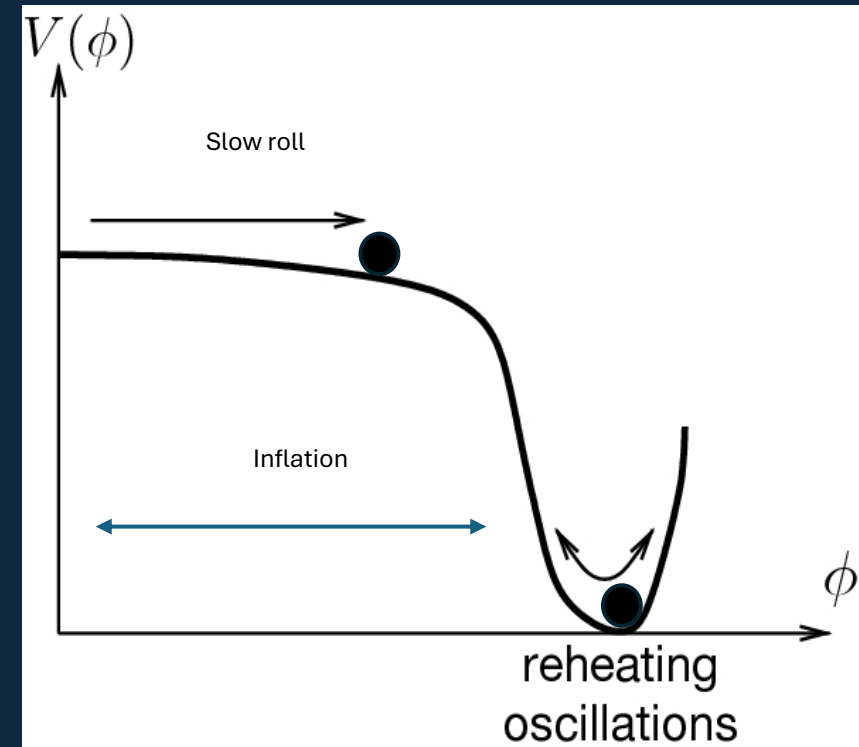
Problem: Warum ist $\Omega_0 = 1$?

- Wir betrachten den Betrag $|1 - \Omega|$ (ändert sich mit der Zeit)
- Heute wissen wir aus WMAP und PLANCK: $|1 - \Omega_0| < 1\%$
- Aber wie sieht es im sehr Frühen Universum aus ?
- Laut Berechnung folgt:
- $|1 - \Omega| \approx 2,4 \cdot 10^{-61} |1 - \Omega_0|$
- **In der Planck-Zeit muss die Krümmung 60 Größenordnung kleiner sein als heute !**
- $\Leftrightarrow |1 - \Omega_0| \approx 4,2 \cdot 10^{60} |1 - \Omega|$
- **Eine winzige Abweichung der Flachheit im sehr frühen Universum müsste dann heute zu einer Riesige Krümmung angewachsen sein**

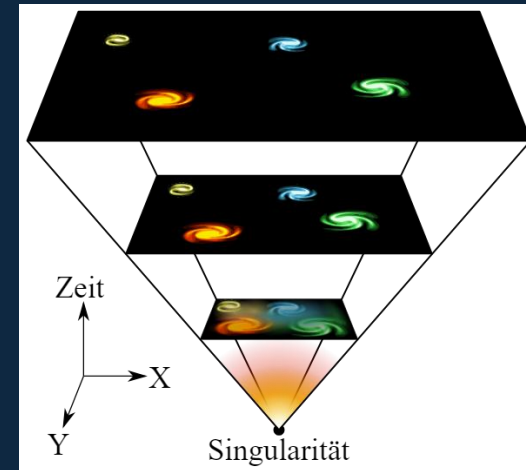


Inflaton Φ

- Die Grund Idee: So ähnlich wie bei der Dunklen Energie, wird eine Substanz benötigt, die den Raum im sehr frühen Universum exponentiell ausdehnt (**Konstante Dichte und Negativer Druck**)
- Einführung eines **Skalaren Quantenfeld $\Phi(t)$** verknüpft mit einem **Potential $V(\Phi)$**
- Wenn sich das Feld langsam bewegt, dann ist der Druck Negativ und verhält sich wie eine Kosmologische Konstante:
 1. Friedmann Gleichung: $H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\Phi) = \frac{\dot{a}^2}{a^2} \Rightarrow a = e^{Ht}$ H ist Konstant
- Inflaton muss irgendwie dann wieder zerfallen damit die Inflation gestoppt wird: Feld bleibt im Minimum des Potentials und schwingt (Reheating)
- **Derzeit kein konkreter Kandidat für das Quantenfeld bekannt**



Primordiale Singularität



Credit: Wiki

Was ist der Urknall?

$$\left\{ \begin{array}{l} R \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \rightarrow \infty \\ T \rightarrow \infty \end{array} \right\}$$

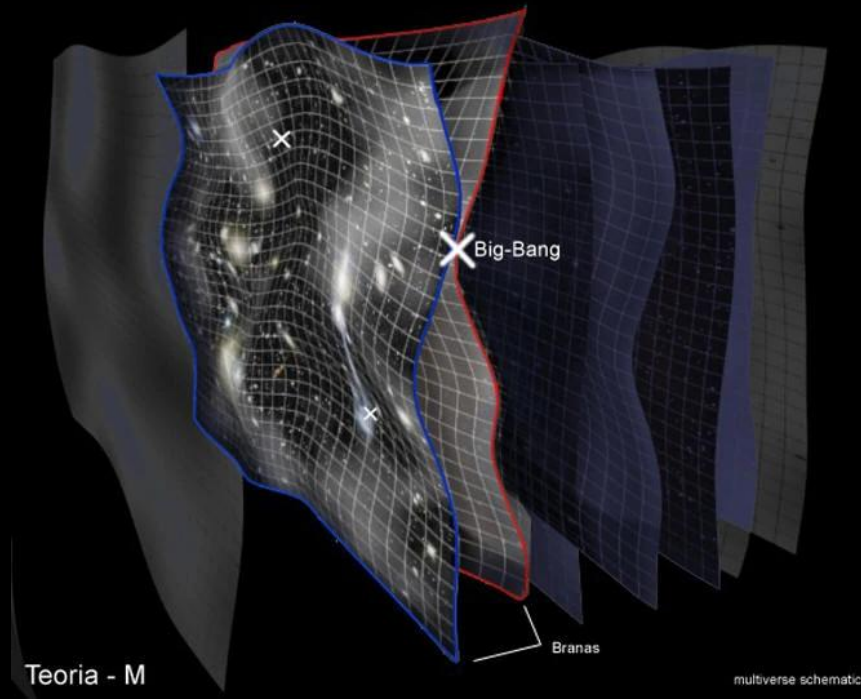
0s bis Planck Zeit

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5,39 \cdot 10^{-44} \text{ s}$$

- String Theorie
- Schleifenquanten-gravitation

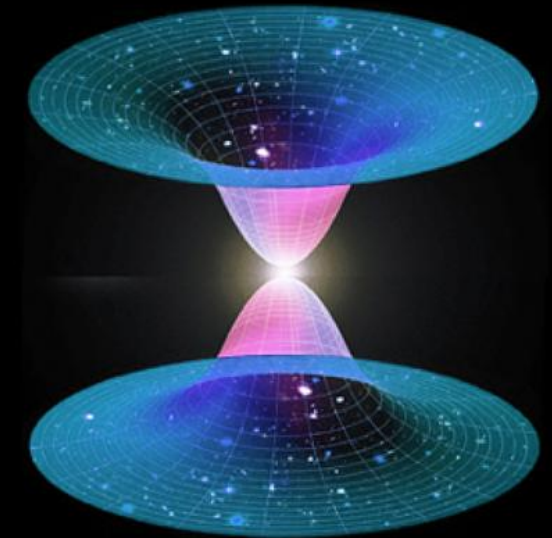
Alternative Kosmologie

Branenkosmologie



Credit: <https://verse-and-dimensions.fandom.com/wiki/Brane>

Schleifenquantenkosmologie



Credit: F. Vidotto / University of the Basque Country

Chaotische Inflation



Credit: Harald Ritsch / Science Library Photo

Danke



Quellen

- [1] „Einführung in die Kosmologie“ – Andrew Linde 2009
- [2] „Cosmologie Physique“ – Dominique Aubert 2019
- [3] „Das Kosmologische Standardmodell“ – Matthias Bartelmann 2019
- [4] „[Die Kosmische Mikrowellenhintergrund und seine Anisotropie](#)“ – M Schönitzer 2012
- [5] Video: „[Le Fond diffus cosmologique](#)“ Conference Bartjan van Tent 2024
- [6] „[Planck und die Welt wie er die sah](#)“ – Matthias Bartelmann – Physik Journal 2017
- [7] „[Les resultats cosmologiques de la mission Planck](#)“ – Nabila Aghanim/Herve Dole – Reflets de la Physique 2020
- [8] Video: „[La synthese des elements legers dans l univers primordial](#)“ – Cyril Pitrou – Institut d astrophysique de Paris – 04-11-2019
- [9] „[Zusammenfassung Primordiale Nukleosynthese](#)“ – Fabian Joswig – 22-02-2015 – Uni Muenster
- [10] Video: „[Kosmische Inflation](#)“ – Sara Konrad – Urknall, Weltall und das Leben – 01-10-2023
- [11] Video „[Cosmology Lecture 9](#)“ – Leonard Susskind – Stanford University

Anhang

Wiki

- https://en.wikipedia.org/wiki/Timeline_of_the_early_universe
- https://en.wikipedia.org/wiki/Chronology_of_the_universe
- https://en.wikipedia.org/wiki/Cosmic_microwave_background

Zustandsgleichung



Druck = Funktion von Dichte

- Ideales Gas: $PV = N \cdot k_B T \Rightarrow P = N \cdot k_B T \frac{\rho}{M}$
- Für die Thermische Energie gilt in diesem Zusammenhang: $\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$
- Daraus folgt $P = \frac{1}{3} N \cdot m \langle v^2 \rangle \frac{\rho}{M} = \frac{1}{3} \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \rho c^2 (= w \rho c^2)$ $\langle v \rangle$ mittlere Geschwindigkeit Teilchen

- Nicht Relativistische Materie : $\langle v \rangle \ll c \Rightarrow P \approx 0$
- Relativistische Materie: $\langle v \rangle \approx c \Rightarrow P = \frac{1}{3} \rho c^2$

1. Friedmann Gleichungen



$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_r + \rho_m) - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\lambda c^2}{3} \quad \text{1. Friedmann Gleichung}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\Omega_{r,0} \rho_{cr,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0} \rho_{cr,0}}{a^3} \right) - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\lambda c^2}{3}$$

$$H^2 = \frac{\cancel{8\pi G} 3H_0^2}{\cancel{3} 8\pi G} \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} \right) - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\lambda c^2}{3}$$

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} - \frac{Kc^2}{a^2 H_0^2} + \frac{\lambda c^2}{3H_0^2} \right)$$

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} - \frac{\Omega_{K,0}}{a^2} + \Omega_{\lambda,0} \right)$$

$$H^2 = H_0^2 E^2$$

$$\text{mit } E^2 = \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{K,0}}{a^2} + \Omega_{\lambda,0} \right)$$

Expansionsfunktion

$$\rho = (\rho_r + \rho_m) \quad H = \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\left[\begin{array}{l} \rho_r = \rho_{r,0} a^{-4} = \Omega_{r,0} \rho_{cr,0} a^{-4} \\ \rho_m = \rho_{m,0} a^{-3} = \Omega_{m,0} \rho_{cr,0} a^{-3} \end{array} \right.$$

$$\rho_{cr,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$\Omega_{\lambda,0} = \frac{\lambda c^2}{3H_0^2} \quad \Omega_{K,0} = -\frac{Kc^2}{H_0^2}$$

Ab wann ist das Universum Materie dominiert?



Strahlungs – und Materie-Äquivalenz a_{eq}

- Bei a_{eq} : $\rho_r = \rho_m$
- $\rho_r = \rho_{r,0} a^{-4} = \Omega_{r,0} \rho_{cr,0} a^{-4}$ und $\rho_m = \rho_{m,0} a^{-3} = \Omega_{m,0} \rho_{cr,0} a^{-3}$
- $\Omega_{r,0} a_{eq}^{-4} = \Omega_{m,0} a_{eq}^{-3} \Rightarrow a_{eq} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} = \frac{8,5 \cdot 10^{-5}}{0,3} \approx 2,8 \cdot 10^{-4} (Z \approx 3528)$

Der Übergang von Strahlung dominiertes Universum zum Materie dominiertes Universum findet **48.000 Jahre*** nach dem Urknall statt.

* *Cosmology Calculator*: astro.uda.edu: $H_0 = 69.6$; $\Omega_{m,0} = 0,286$; Flat space

Wann begann die Beschleunigung?



Wendepunkt wenn $\ddot{a} = 0$ (*Keine Beschleunigung, keine Bremsung*)

- *2. Friedmann Gleichung (umgeformt ohne Strahlung):*

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H_0^2 \left(-\frac{1}{2} \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\lambda,0} \right)$$

- **Wendepunkt wenn $\ddot{a} = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2} \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\lambda,0} \right) = 0$**

- $\Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega_{m,0}}{(1-\Omega_{m,0})}} = \sqrt[3]{\frac{0,3}{2*0,7}} = 0,59 \Rightarrow z = 0,62$ **vor ca. 6 Mrd. Jahre !**

Spektrale Index n_s (Parameter Standard Modell)

Der spektrale Index beschreibt, wie die Amplituden dieser Dichteschwankungen in Abhängigkeit von der räumlichen Skala (oder Wellenlänge) verteilt sind. Wenn man die Stärke der Schwankungen in Abhängigkeit von ihrer Skala oder Wellenzahl k betrachtet, kann man diese als Potenzgesetz ausdrücken:

$$P(k) \propto k^{n_s-1}$$

wobei:

- $P(k)$ das Leistungsspektrum
- k die Wellenzahl
- n_s der **spektrale Index**

- Für $n_s = 1$:
 - Das Potenzgesetz wird zu $P(k) \propto k^0$, was bedeutet, dass das Spektrum **skaleninvariant** ist. Das heißt, die Stärke der Fluktuationen ist unabhängig von der Wellenzahl k – alle Skalen tragen gleich stark zu den Fluktuationen bei. Dies war die ursprüngliche Vorhersage einiger Inflationstheorien.
- Für $n_s < 1$:
 - Das Spektrum ist **rot geneigt**, d. h. $P(k)$ nimmt für kleinere Wellenzahlen (größere Skalen) zu und für größere Wellenzahlen (kleinere Skalen) ab. In diesem Fall sind Fluktuationen auf großen Skalen stärker als auf kleinen Skalen. Dies ist das von aktuellen Beobachtungen bevorzugte Szenario, mit einem gemessenen Wert von $n_s \approx 0,96$.
- Für $n_s > 1$:
 - Das Spektrum ist **blau geneigt**, d. h. $P(k)$ nimmt für größere Wellenzahlen (kleinere Skalen) zu und für kleinere Wellenzahlen (größere Skalen) ab. In diesem Fall wären die Fluktuationen auf kleinen Skalen stärker als auf großen Skalen, was nicht mit den aktuellen Beobachtungen übereinstimmt.

Kosmologische Bedeutung:

Das Potenzgesetz des Leistungsspektrums hilft, die Struktur der ursprünglichen Dichteschwankungen im frühen Universum zu verstehen, aus denen später Galaxien, Galaxienhaufen und andere großräumige Strukturen entstanden sind. Es gibt einen direkten Zusammenhang zwischen der Form des Leistungsspektrums und der Theorie der **kosmischen Inflation**, die annimmt, dass diese Schwankungen durch Quantenfluktuationen in der sehr frühen Phase des Universums erzeugt wurden.

Beispiele:

- Bei einem **rot geneigten Spektrum** ($n_s < 1$) haben große Strukturen wie Galaxienhaufen stärkere Fluktuationen, während kleine Strukturen wie Galaxien geringere Fluktuationen aufweisen. Dies spiegelt sich auch in den Messungen der kosmischen Hintergrundstrahlung wider.
- Ein **skaleninvariantes Spektrum** ($n_s = 1$) würde bedeuten, dass die Stärke der Fluktuationen auf allen Skalen gleich ist, was jedoch von den Daten nicht unterstützt wird.

Ratio Baryon/Photon



Photonen und Baryonen

- Annahme: alle Baryonen in Wasserstoff eingeschlossen:
- Anzahldichte Baryonen Heute: $n_{B,0} = \frac{\rho_{B,0}}{m_p} = \frac{\Omega_{B,0} 3H_0^2}{m_p 8\pi G} = 5.5 \cdot 10^{-6} \Omega_{B,0} cm^{-3}$
- $\Omega_{B,0} = 0,049 \pm 0,0006$
- Anzahldichte Photonen durch Bose-Einstein Statistik: $n_\gamma = g \frac{\xi(3)}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \approx 410 cm^{-3}$ ($g=2$ Zeta(3)=1,2)
- Ergebnis: $\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} = \frac{n_{B,0}}{n_{\gamma,0}} \approx 6,6 \cdot 10^{-10} \approx \frac{1}{1,5 \cdot 10^9}$
- Unerklärt warum es Baryonen im Universum gibt (Asymmetrie Baryonen Anti Baryonen)
- Wenn wir von Temperatur des Universums sprechen dann ist die Temperatur des Photonengas gemeint
- Spielt eine wichtige Rolle in der Nukleosynthese und für die Rekombination. In der Primordiale Nukleosynthese hat η einen direkten Einfluss auf die **Expansionsrate** ($H^2 \sim \rho_m$) des Universums und auf die **Nuklear Reaktionsrate**.

Quelle: [3]

Problem mit dem Hubble Radius



Hubble Radius bei Planck Zeit

- Skalenfaktor bei Planck Zeit (Strahlung dominiert: $E(a) = \sqrt{\Omega_{r,0}} a^{-2}$):
 - $H = \frac{\dot{a}}{a} = E(a)H_0 = H_0\sqrt{\Omega_{r,0}}a^{-2} \Rightarrow ada = H_0\sqrt{\Omega_{r,0}}dt \Rightarrow \int_0^{a_p} ada = H_0\sqrt{\Omega_{r,0}} \int_0^{t_p} dt$
 - $\Rightarrow t_p = \frac{a_p^2}{2H_0\sqrt{\Omega_{r,0}}} \Rightarrow a_p = \sqrt{2H_0\sqrt{\Omega_{r,0}}t^{1/2}} \Rightarrow a_p \approx 4,9 \cdot 10^{-31}$
- Hubble Radius bei Planck Zeit
 - $r_H(t_p) = \frac{c}{H} = \frac{c}{H_0\sqrt{\Omega_{r,0}}a_p^{-4}} = 2ct_p = 3 \cdot 10^{-33} \text{m}$

Flachheitsproblem



Betrachtung des Betrages $|\Omega - 1|$ in der Planck Zeit

- $H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} - \frac{\Omega_{K,0}}{a^2} + \Omega_{\lambda,0} \right) = H_0^2 E^2$
- $\Leftrightarrow H_0^2 \left(E^2 \Omega_r + E^2 \Omega_m + E^2 \Omega_\lambda + E^2 \frac{\Omega_k}{a^2} \right) = H_0^2 E^2$
- $\Leftrightarrow \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\lambda + \frac{\Omega_K}{a^2} = 1$ und $\Omega_K = \frac{\Omega_{K,0}}{E^2}$ (Parameter Definition)
- $\Leftrightarrow \Omega - 1 = -\frac{\Omega_{K,0}}{a^2 E^2}$
- Die Krümmung wird durch den Betrag $|1 - \Omega| = \left| \frac{\Omega_{K,0} H_0^2}{a^2 H^2} \right| = \frac{K c^2}{a^2 H^2}$ gegeben (ist Zeit abhängig)
- Weil Planck Zeit $a_p \approx 4,9 \cdot 10^{-31}$ und $E(a) = \sqrt{\Omega_{r,0}} a^{-2} \approx a^2$ erhalten wir
- $|1 - \Omega| = a_p^2 |\Omega_{K,0}| \approx 2,4 \cdot 10^{-61} \Omega_{K,0} \Leftrightarrow |\Omega_{K,0}| = \frac{|1 - \Omega|}{a_p^2} \approx 4,2 \cdot 10^{60} |1 - \Omega|$

Flachheitsproblem



Wie viel expansion ?

- $\Omega_{k,0} \approx 4,2 \cdot 10^{60} |1 - \Omega| = 4,2 \cdot 10^{60} \cdot \frac{Kc^2}{a^2 H^2}$
- => die Idee der Term $\frac{c}{aH}$ (mitbewegter Hubble Radius) um den Faktor $\sqrt{4,2 \cdot 10^{60}} \approx 2 \cdot 10^{30}$ reduzieren
- Daraus folgt: $\frac{d}{dt} \left(\frac{c}{aH} \right) < 0 \Rightarrow -\frac{c\ddot{a}}{a^2} < 0 \Rightarrow \ddot{a} > 0$
- **Das Flachheitsproblem ist gelöst wenn das Universum lange genug beschleunigt expandiert.**
- In der Planck Ära expandiert das Universum um ein Faktor 10^{30}

Inflaton



Mechanismus Inflation Theorie

- Einführung eines **Skalaren Quantenfeld** $\Phi(t)$ verknüpft mit einem **Potential** $V(\Phi)$ (Ableitung entspricht eine Kraft $F = -\frac{\partial V}{\partial \Phi}$)
- Man zeigt für die Energiedichte und Druck:
 - $\rho_\Phi = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi)$ (Kinetische + Potentielle Energie)
 - $P_\Phi = \frac{\dot{\Phi}^2}{2} - V(\Phi)$
- Angewendet an 1. Friedmann Gleichung ($K = \lambda = 0$):
$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi) \right)$$
- Aus der Energie Haltung zeigt man: $\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} = -\frac{\partial V}{\partial \Phi}$
 - $dU + PdV = 0 \Leftrightarrow \dot{\rho}a^3 + 3\rho a^2\dot{a} + 3Pa^2\dot{a} = 0 \Leftrightarrow \dot{\rho} + 3H\rho + 3PH = 0$
 - $\Leftrightarrow \left(\dot{\Phi}\ddot{\Phi} + \frac{\partial V}{\partial \Phi}\dot{\Phi} \right) + 3H\left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} + V(\Phi)\right) + 3H\left(\frac{\dot{\Phi}^2}{2} - V(\Phi)\right) = 0$
- Wie bei der Dunkle Energie, wählt man $V(\Phi)$ so dass das Skalar Feld Φ sich langsam bewegt: $\dot{\Phi} \rightarrow 0$ (damit $P_\Phi = -\rho_\Phi < 0$)
- Dann folgt : $H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\Phi)$
- Dies ist dann nur möglich wenn $V(\Phi)$ langsam absteigt (siehe Gleichung aus der Energiehaltung: **Slow roll**
 - $\left| \frac{\partial V}{\partial \Phi} \right| \ll 1$ und $\left| \frac{d^2V}{d\Phi^2} \right| \ll 1$
- Inflation hört auf wenn $V(\Phi) \sim 0$ und $\dot{\Phi} \sim 0$: Skalar Feld bleibt im Minimum vom Potential
- Reheating Prozess: Energie Inflation wieder umwandeln in Strahlungs und Materie Energie